ივანე ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

კოშის ფუნქციონალური განტოლების ამოხსნის მარტინგალური მეთოდები

მათემატიკის დეპარტამენტი

ლუკა თიკანაძე

(დოქტორანტის სემინარი 2)

ხელმძღვანელი:

პროფესორი
მიხეილ მანია

თბილისი 2020

შინაარსი

შესავალი

მოცემულ ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ კოშის ფუნქციონალურ განტოლებებს და ვაჩვენებთ, რომ ამ განტოლებების ზოგადი ამოხსნის პოვნა შესაფერისი ფუნციით გარდაქმინილი ბროუნის მოძრაობის მარტინგალობის ევივალენტურია.
ერთ–ერთ ფუნდამენტურ განტოლებას ფუნქციონალურ განტოლებათა თეორიაში წარმოადგგენს კოშის ადიციური ფუნქციონალური განტოლება

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{ყოველი} \quad x, y \in R \tag{1.1}$$

რომელიც უკვე განვიხილეთ წინა ნაშრომში. ამ ნაშრომის ძირითად მიზანს წარმოადგენს კოშის დანარჩენი სამი ფუნქციონალური განტოლების კვლევა. შემდეგ სამ ფუნქციონალურ განტოლებას

$$f(x+y) = f(x) f(y), \quad \text{ყოველი} \quad x, y \in R$$

$$f(x) + f(y) = f(xy) \quad \text{ყოველი} \quad x, y \in R_+$$

$$f(xy) = f(x) f(y) \quad \text{ყოველი} \quad x, y \in R_+$$

შესაბამისად კოშის ექსპონენციალური, ლოგარითმული და ხარისხოვანი ფუქნციონალური განტოლებები ეწოდება, ვინაიდან ამ განტოლებების ზოგად ამოხსნებს შესაბამისად აქვს შემდეგი სახე $e^{\lambda x}$, λlnx და x^{λ}

კოშის ფუნქციონალური განტოლებები

სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა 2.1. (a) ფუნქცია $(f(x), x \in R)$ არის არანულოვანი, ზომადი ამონახსნი შემდეგი ფუნქციონალური განტოლების

$$f(x+y) = f(x) f(y), x, y \in R \tag{2.1}$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $f(W_t)$ არის მკაცრად დადებითი პროცესი, ისეთი რომ $lnf(W_t)$ მარტინგალია.

(b) ფუნქცია $(f(x), x \in R)$ არის ზომადი ამონახსნი შემდეგი ფუქნციონალური განტოლების

$$f(x) + f(y) = f(xy), x, y \in R_+ \tag{2.2}$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f\left(e^{W_t}\right)$ პროცესი მარტინგალია.

(c) ფუნქცია $(f(x), x \in R)$ არის არანულოვანი, ზომადი ამონახსნი შემდეგი ფუქნციონალური განტოლების

$$f(xy) = f(x) f(y), x, y \in R_+ \tag{2.3}$$

მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f\left(e^{W_t}\right)$ არის მკაცრად დადებითი პროცესი, ისეთი რომ $lnf\left(e^{W_t}\right)$ მარტინგალია.

დამტკიცება. მოვიყვანოთ მოცემული თეორემის დამტკციება. დავიწყოთ (a) პუნქტით. ადვილი დასანახია, რომ 2.1 განტოლების ამონახსნი ნულია ყველგან ან არსად. მართლაც, ვთქვათ რაიმე u–თვის $x = y = \frac{u}{2}$ მაშინ 2.1 განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს $f(u) = f^2\left(\frac{u}{2}\right) \geq 0$ და ვთქვათ $f(u_0) = 0$ რაიმე $u_0 > 0$–ისთვის, მაშინ

$$f(u) = f(u - u_0 + u_0) = f(u - u_0) f(u_0) = 0.$$

ამიტომ შეგვიძლია ამონახსნი $f(x) = 0$ გამოვრიცხოთ და დაგვრჩება $f(x) > 0$, ე.ი. $f(W_t)$ პროცესი მკაცრად დადებითია. ახლა ვაჩვენოთ $(lnf(W_t), t \geq 0)$ პროცესის მარტინგალობა. ჯერ ვაჩვენოთ რომ

$$E|lnf(W_t)| < \infty, \quad \text{ყოველი} \quad t \geq 0.$$

ვთქვათ $X = f(W_t)$ და $Y = f(B_t)$, სადაც B_t ბროუნის მოძრაობაა დამოუკიდებელი W_t–გან. 2.1–დან გამომდინარეობს, რომ

$$XY = f(W_t)\, f(B_t) = f(W_t + B_t)\,.$$

თუ 2.1 განტოლებაში ჩავსვათ $x = B_t$ და $y = W_t - B_t$ სიდიდეებს, მივიღებთ $f(W_t) = f(B_t)\, f(W_t - B_t)$ ტოლობას, საიდანაც

$$\frac{X}{Y} = \frac{f(W_t)}{f(B_t)} = f(W_t - B_t)$$

ვინაიდან $W_t + B_t$ და $W_t - B_t$ დამოუკიდებელია, ასევე დამოუკიდებელი იქნება შემთხვევითი
სიდიდეები XY და $\frac{X}{Y}$. ბერნშტეინის (იხ. [1]) თეორემის თანახმად კი, შემთხვევით სიდიდეს $X = f(W_t)$(და $Y = f(B_t)$) ექნება ლოგნორმალური განაწილება, აქედან კი ვასკვნით, რომ $lnf(W_t)$ განაწილებულია ნორმალურად რაც ნიშნავს რომ $lnf(W_t)$ ინტეგრებადია $\forall t \geq 0$. ახლა ვაჩვენოთ მარტინგალური ტოლობის სამართლიანობა ანუ

$$E\left[lnf(W_t)\,|\mathcal{F}_s\right] = lnf(W_s)\,. \quad (P - \text{თ.ა.}) \tag{2.4}$$

დავუბრუდნეთ კვლავ 2.1 განტოლებას და განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც $x = W_t - W_s$ და $y = W_s$, შესაბამისად მოცემული განტოლებიდან მივიღებთ ტოლობას

$$f(W_t) = f(W_t - W_s)\, f(W_s)$$

რომლის გალოგარითმების შემდეგ ვიღებთ

$$lnf(W_t) = lnf(W_t - W_s) + lnf(W_s)$$

თუ ამ უკანასკნელი ტოლობის ორივე მხრიდან ავიღებთ პირობით მათემატიკურ ლოდინს

$$E\left[lnf(W_t)\,|\mathcal{F}_s\right] = E\left[lnf(W_t - W_s) + lnf(W_s)\,|\mathcal{F}_s\right]. \qquad (P - \text{თ.ა.})$$

ვინაიდან $W_t - W_s$ დამოუკიდებელია $\mathcal{F}_s$ ფილტრაციისგან და W_s ზომადია $\mathcal{F}_s$–ის მიმართ ამიტომ ეს ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$E\left[lnf(W_t)\,|\mathcal{F}_s\right] = Elnf(W_t - W_s) + lnf(W_s)\,, \qquad (P - \text{თ.ა.}) \tag{2.5}$$

ცხადია რომ, 2.1 განტოლების ძალით $f(x+0) = f(x)\, f(0)$ ე.ი. $f(0) = 1$. ხოლო ისევ 2.1 განტოლების ორივე მხარეს ავიღოთ ლოგარითმები და ჩავსვათ $y = -x$, მივიღებთ შემდეგს $lnf(x) = -lnf(-x)$ რაც ნიშნავს, რომ ფუნქცია $lnf(x)$ კენტია.ხოლო ვინაიდან $W_t - W_s$ სიდიდე სიმეტრიულად არის განაწილებული, აქედან გამომდიანრეობს რომ $Elnf(W_t - W_s) = 0$. საიდანაც 2.5 ტოლობა ღებულობს შემდეგ სახეს

$$E\left[lnf(W_t)\,|\mathcal{F}_s\right] = lnf(W_s)$$

საიდანაც ვიღებთ 2.4 მარტინგალური ტოლობის სამართლიანობას.
ახლა დავუშვათ, რომ $f(W_t)$ არის მკაცრად დადებითი პროცესი. ხოლო თუ გამოვიყენებთ [A1] თეორემას მივიღებთ, რომ

$$lnf(u) = \lambda u \quad \Rightarrow \quad f(u) = e^{\lambda u}.$$

ახლა გადავიდეთ b) პუნქტის დამტკიცებაზე.
ვაჩვენოთ რომ პროცესი $\left(f\left(e^{W_t}\right), t \geq 0\right)$ მარტინგალია. თავდაპირველად ვაჩვენოთ ინტეგრებადობა, ამისთვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები $X = f\left(e^{W_t}\right)$ და $Y = f(B_t)$ სადაც W_t და B_t დამოუკიდებელი ბროუნის მოძრაობებია. 2.2 განტოლების ძალით,

$$X + Y = f\left(e^{W_t}\right) + f\left(e^{B_t}\right) = f\left(e^{W_t + B_t}\right)$$

ანალოგიურად როგორც a) პუნქტის დამტკიცებისას , 2.2 განტოლებაში ჩავსვათ $x = e^{W_t}$ და $y = e^{B_t - W_t}$, რის შემდეგაც მივიღებთ

$$X - Y = f\left(e^{W_t}\right) - f\left(e^{B_t}\right) = -f\left(e^{-(W_t - B_t)}\right)$$

ვინაიდან შემთხვევითი სიდიდეები $W_t + B_t$ და $W_t - B_t$ დამოუკიდებელია ამიტომ ადგილი ექნება შემდეგს $X + Y \perp\!\!\!\perp \quad X - Y$. ხოლო ბერნშტეინის თეორემის ძალით შემთხვევითი სიდიდე $X = f\left(e^{W_t}\right)$ განაწილებულია ნორმალურად, ე.ი. $E|f\left(e^{W_t}\right)| < \infty$. ახლა ვაჩვენოთ რომ ადგილი აქვს მარტინგალურ ტოლობასაც, ანუ სამართლიანია შემდეგი

$$E\left[f\left(e^{W_t}\right)|\mathcal{F}_s\right] = f\left(e^{W_s}\right). \tag{2.6}$$

ამისთვის 2.2 განტოლებაში ჩავსვათ $x = e^{W_t - W_s}$ და $y = e^{W_s}$. რის შემდეგაც ვღებულობთ

$$f\left(e^{W_t}\right) = f\left(e^{W_t - W_s}\right) + f\left(e^{W_s}\right)$$

უკანასკნელი განტოლების ორივე მხარეს მოვდოთ პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\mathcal{F}_s$ ფილტრაციის მიმართ, საიდანაც მივიღებთ

$$E\left[f\left(e^{W_t}\right)|\mathcal{F}_s\right] = E\left[f\left(e^{W_t - W_s}\right) + f\left(e^{W_s}\right)|\mathcal{F}_s\right]$$

ვინაიდან $W_t - W_s \quad \perp\!\!\!\perp \quad \mathcal{F}_s$-ისგან, ხოლო W_s ზომადია $\mathcal{F}_s$-ის მიმართ ამიტომ უკანასკნელი ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$E\left[f\left(e^{W_t}\right)|\mathcal{F}_s\right] = Ef\left(e^{W_t - W_s}\right) + f\left(e^{W_s}\right). \tag{2.7}$$

ადვილი დასანახია, რომ $Ef\left(e^{W_t - W_s}\right) = 0$ მართლაც აღვნიშნოთ $W_t - W_s = u$ და ვაჩვენოთ რომ ფუნქცია $f\left(e^u\right)$ კენტია, რის შემდეგაც $W_t - W_s$-ის სიმეტრიულობიდან გამომდინარე ტრივიალურია სასურველი შედეგის დანახვა. მართლაც 2.2 ტოლობაში ჩავსვათ $y = 1$, საიდანაც ვიღებთ $f(1) = 0$ თანაფარდობას. კვლავ 2.2 ტოლობაში ჩავსვათ $x = e^u$ და $y = e^{-u}$. რის შემდეგაც მვიიღებთ

$$f\left(e^u\right) + f\left(e^{-u}\right) = f(1) \quad \Rightarrow \quad f\left(e^u\right) = -f\left(e^{-u}\right)$$

ე.ი. $Ef\left(e^{W_t - W_s}\right) = 0$, საიდანაც ვღებულობთ მარტინგალური ტოლობის 2.6 სამართლიანობას. ვინაიდან პროცესი $\left(f\left(e^{W_t}\right)\right)$ მარტინგალია ამიტომ [A1] თეორემის ძალით

$$f\left(e^u\right) = \lambda u$$

აღვნიშნოთ $u = lnx$, რის შემდეგაც უკანასკნელი ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$f(x) = \lambda lnx.$$

ვაჩვენოთ c) პუნქტის სამართლიანობაც.
ცხადია, რომ 2.3 განტოლების ამონახსნი ნულია ყველგან ან არსად. ნამდივლად 2.3 დან გამომდიანრეობს, რომ

$$f\left(x^2\right) = f^2(x) \geq 0$$

და თუ $f(x_0) = 0$ რაიმე $x_0 > 0$-თვის მაშინ

$$f(x) = f\left(x_0 \frac{x}{x_0}\right) = f(x_0)\, f\left(\frac{x}{x_0}\right) = 0.$$

ამიტომ შეგვიძლია გამოვრიცხოთ ამონახსნი $f(x) = 0$, ე.ი. ყოველი $x > 0$-თვის $f(x) > 0$ ანუ პრიცესი $f\left(e^{W_t}\right)$ მკაცრად დადებითია.
ვაჩვენოთ, რომ პროცესი $\left(lnf\left(e^{W_t}\right), t \geq 0\right)$ მარტინგალია. თავდაპირველად

$$E|lnf\left(e^{W_t}\right)| < \infty, \quad \text{for all} \quad t \geq 0.$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები $X = f\left(e^{W_t}\right)$ და $Y = f\left(e^{B_t}\right)$, სადაც B_t ბროუნის მოძრაობაა დამოუკიდებელი W_t-სგან. 2.3 გამომდინარეობს, რომ

$$XY = f\left(e^{W_t}\right) f\left(e^{B_t}\right) = f\left(e^{W_t+B_t}\right),$$

$$\frac{X}{Y} = \frac{f\left(e^{W_t}\right)}{f\left(e^{B_t}\right)} = f\left(e^{W_t-B_t}\right)$$

ვინაიდან $W_t + B_t$ დამოუკიდებელია $W_t - B_t$-სგან, ასევე დამოუკიდებლები არიან შემთხვევითი სიდიდეები XY და $\frac{X}{Y}$. ბერნშტეინის თეორემის ძალით კი $X = f\left(e^{W_t}\right)$ (და $Y = f\left(e^{B_t}\right)$) განაწილებული იქნება ლოგნორმალურად, ე.ი. $lnf\left(e^{W_t}\right)$ განაწილებულია ნორმალურად, ამიტომ $lnf\left(e^{W_t}\right)$ ინტეგრებადია ყოველი $t \geq 0$. ცვლადთა გარდაქმნით 2.3 ტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს

$$f\left(e^{u+v}\right) = f\left(e^{u}\right) f\left(e^{v}\right)$$

უკანასკნელ ტოლობაში ჩავსვათ $u = W_t - W_s$ და $v = W_s$ და ორივე მხარეს მვოდოთ ლოგარითმები, მივიღებთ შემდეგს

$$lnf\left(e^{W_t}\right) - lnf\left(e^{W_s}\right) = lnf\left(e^{W_t-W_s}\right)$$

ბროუნის მოძრაობის თვისების დამოუკდიებელი ნაზრდების შესახებ ძალით $lnf\left(e^{W_t-W_s}\right)$ დამოუკიდებელია $\mathcal{F}_s^W$ ფილტრაციისგან და უკანასკნელ ტოლობას მვოდოთ ორივე მხარეს პირობითი მათემატიკური ლოდინები

$$E\left(lnf\left(e^{W_t}\right) - lnf\left(e^{W_s}\right)|\mathcal{F}_s\right) = E\left(lnf\left(e^{W_t-W_s}\right)|\mathcal{F}_s\right) = Elnf\left(e^{W_t-W_s}\right)$$

მაგრამ

$$Elnf\left(e^{W_t-W_s}\right) = 0,$$

ვინაიდან $lnf\left(e^{u}\right)$ კენტი ფუნქციაა და $W_t - W_s$ სიმეტრიულადაა განაწილებული. ე.ი. მვიიღეთ რომ $lnf\left(e^{W_t}\right)$ მარტინგალია ამიტომ [A1] თეორემის ძალით

$$lnf\left(e^{u}\right) = \lambda u$$

რაიმე $\lambda \in R$ და მივმართოთ ცვლადთა გარდაქმნას შემდეგნაირად $u = lny$ საიდანაც ვღებულობთ $f(y) = y^{\lambda}$, რაც აკამყოფილებს 2.3 განტოლებას. □

დამატება

სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა 3.1 (A1). ვთქვათ $(f(x), x \in R)$ ზომადი ფუქნციაა. პროცესი $(f(W_t), t \geq 0)$ მარტინგალია ნატურალური ფილტრაციის მიმართ $F = \left(\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\right)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ

$$f(x) = ax + b \tag{3.1}$$

რაიმე $a, b \in R$ მუდმივებისთვის.

ლიტერატურა

[1] A probabilistic note on the Cauchy functional equation, Springer International Publishing AG. part of Springer Nature 2018, Sergey N.Smirnov (2018)

[2] Hamel, G.:Eine Basis Zahlen und die unstetigen Losungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Math. Ann 60(3), 459–462(1942)

[3] Bernstein, S.N .: Ob odnom svoystve, harakterizuyushhem zakon Gaussa (in Russian) [On a characteristic property of the normal law]. Tr. leningr.Polytech. Inst.3,21–22 (1941)