ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტი

კობა ივანაძე

ფუნქციათა კლასები და ფურიეს მწკვრივები

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

დოქტორანტის სემინარი 1

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოცირებული პროფესორი,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი თეიმურაზ ახობაძე

თბილისი 2020

CONTENTS

ანოტაცია

ნაშრომი რეფერატული ხასიათისაა. პირველ თავში განხილულია რისისა და ფიშერის თეორემა და ორთონორმირებული სისტემის ჩაკეტილობა. მეორე თავი ეთმობა მარცინკიევიჩის თეორემას. მესამე თავი ეხება შეუღლებული ფუნქციის არსებობის საკითხებს. მეოთხე და მეხუთე თავებში განიხილება ფურიეს მწკვრივების ჩეზაროს საშუალოები, ხოლო მეექვსე თავში - აბელის საშუალოები. მეშვიდე თავში მოცემულია ჩეზაროსა და აბელის საშუალოების ზემოდან შეფასებასთან დაკავშირებული საკითხები.

Summary

The paper is kind of abstract. In the first Chapter the Reisz and Fischer theorem and the properties of orthonormal systems are considered. The second Chapter deals with the Marcinskiewcz theorem. In the third Chapter the existence of an conjugate function is considered. Chapter 4, Chapter 5 and Chapter 6 deals with $(C,1)$ and Abel means of Fourier series. In Chapter 7 the majorants of $(C,1)$ and Abel means of Fourier series are given.

1. L^2 კლასი

ვთქვათ, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots$ არის ორთონორმირებული სისტემა (a,b)-ზე. თუ $c_1, c_2, \ldots$ არის $f \in L^2$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\phi_n\}$ სისტემის მიმართ, მაშინ $\sum |c_\nu|^2$ მწკვრივი კრებადია. შებრუნებული დებულება არის ლებეგის თეორიის ერთერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი შედეგი.

თეორემა 1.1. *რისის და ფიშერის თეორემა. ვთქვათ, $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots$ არის ორთონორმირებულ ფუნქციათა სიმრავლე (a,b)-ზე და $c_1, c_2, \ldots$ არის რიცხვთა ისეთი მიმდევრობა, რომ $\sum |c_\nu|^2$ მწკვრივი კრებადია. მაშინ არსებობს ისეთი $f \in L^2(a,b)$ ფუნქცია, რომ მისი ფურიეს კოეფიციენტი ϕ_ν-ს მიმართ არის c_ν და ამასთან*

$$\int_a^b |f|^2 dx = \sum_1^\infty |c_\nu|^2, \tag{1.1}$$

$$\int_a^b |f - s_n|^2 dx \to 0, \tag{1.2}$$

სადაც s_n არის $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \ldots$ მწკვრივის კერძო ჯამი.

Proof. ტოლობიდან

$$\int_a^b |s_{n+k} - s_n|^2 = \sum_{n+1}^{n+k} |c_\nu|^2$$

გამომდინარეობს, რომ $||s_m - s_n||_2 \to 0$ როცა $m, n \to 0$. $L^2(a,b)$ სივრცის სისრულიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $f \in L^2$ ფუნქცია ისეთი, რომ $||f - s_n||_2 \to 0$. თუ $n \geq j$

$$c_j = \int_a^b s_n \overline{\phi}_j dx = \int_a^b f \overline{\phi}_j dx + \int_a^b (s_n - f)\overline{\phi}_j dx.$$

შვარცის უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ უკანასკნელი ინტეგრალი მოდულით არ გადააჭარბებს $||s_n - f||_2 = o(1)$ სიდიდეს და $n \to \infty$ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ, რომ c_j არის f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი ϕ_j-ს მიმართ. რადგან s_n არის f ფუნქციის ფურიეს მწკვრივის n-ური კერძო ჯამი, ამიტომ (1.2)-ის მარცხენა მხარე იქნება

$$\int_a^b |f|^2 dx - \left(|c_1|^2 + \ldots + |c_n|^2\right)$$

(ზიგმუნდი, I თავი, (7.4)), საიდანაც (1.2)-ს მივიღებთ $n \to \infty$ ზღვარზე გადასვლით. □

ვიტყვით, რომ $\{\phi_\nu\}$ ორთონორმირებული სისტემა (a,b)-ზე არის ჩაკეტილი, თუ ყოველი $f \in L^2(a,b)$ ფუნქციისთვის სრულდება პარსევალის ფორმულა:

$$\int_a^b |f|^2 dx = \sum_{\nu=1}^\infty |c_\nu|^2. \tag{1.3}$$

L^2 კლასში ცნებები "ჩაკეტილობა" და "სისრულე" არის ექვივალენტური. ცხადია, ყოველი ჩაკეტილი სისტემა არის სრული. შებრუნებულის დასამტკიცებლად, ვთქვათ, $c_1, c_2, \ldots$, არის $f \in L^2(a,b)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები $\{\phi_\nu\}$ სისტემის მიმართ. რადგან $\sum |c_\nu|^2$ მწკვრივი

კრებადია, თეორემა 1.1 -დან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $g \in L^2$ ფუნქცია, ფურიეს კოეფიციენტებით c_ν და $||g||_2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots$. რადგან f და g ფუნქციებს აქვს ერთი და იგივე ფურიეს კოეფიციენტები და $\{\phi_\nu\}$ არის სრული, მივიღებთ $f \equiv g$, საიდანაც გამომდინარეობს (1.3).

თუ თეორემა 1.1-ში მოცემული $\{\phi_\nu\}$ სისტემა არის სრული, მაშინ f ფუნქციის წარმოდგენა ფურიეს მწკვრივის სახით არის ერთადერთი. ვთქვათ, $\{\phi_\nu\}$ არ არის სრული და $\{\psi_\nu\}$ არის მისი ისეთი გაფართოება, რომ $\phi_1, \phi_2, ..., \psi_1, \psi_2, ...,$ არის ორთონორმირებული და სრული (a, b)-ში. ვთქვათ, $d_n = \int_a^b f\overline{\psi}_n dx$. პარსევალის ფორმულიდან გვაქვს:

$$\int_a^b |f|^2 dx = \sum |c_\nu|^2 + \sum |d_\nu|^2.$$

(1.1)-დან მივიღებთ, რომ $d_1 = d_2 = ... = 0$. მაშასადამე, თუ $\phi_1, \phi_2, ...,$ არ არის სრული, რისისა და ფიშერის თეორემით f ფუნქციის წარმოდგენა ერთადერთია, თუ მისი ფურიეს კოეფიციენტები ϕ_ν-ს მიმართ არის c_ν, ხოლო $\{\phi_\nu\}$ სისტემის ნებისმიერი გაფართოების მიმართ არის 0.

თეორემა 1.2. *$\{\phi_\nu\}$ ორთონორმირებული სისტემა არის სრული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ყოველი $f \in L^2(a, b)$ ფუნქციისა და ნებისმიერ $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი კომბინაცია $S = \gamma_1\phi_1 + ... + \gamma_n\phi_n$, რომ სრულდება პირობა*

$$||f - S||_2 < \varepsilon.$$

Proof. რადგან სისრულე (1.3)-ის ექვივალენტურია, წრფივ კომბინაციად შეგვიძლია ავიღოთ f ფუნქციის ფურიეს მწკვრივის კერძო ჯამი, საიდანაც გამომდინარეობს აუცილებლობა. მეორე მხვრივ, თუ $||f - S||_2 < \varepsilon$ რაიმე $S = \gamma_1\phi_1 + ... + \gamma_n\phi_n$-თვის, მაშინ $||f - s_n||_2 \le ||f - S||_2 < \varepsilon$ (ზიგმუნდი, I თავი, (7.3)), საიდანაც მივიღებთ, რომ $||f - s_n||_2 \to 0$. □

ტრიგონომეტრიული სისტემა არის სრული (ზიგმუნდი, I თავი,პარ.6), შესაბამისად ის არის ჩაკეტილიც. ამრიგად, ჩვენ მივიღეთ ამ სისტემისთვის პარსევალის ფორმულის კიდევ ერთი დამტკიცება.

ვთქვათ, α_ν, β_ν არის $f \in L^2$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები. თეორემა (1.1)-დან გამომდინარეობს

$$\tilde{S}[f] = \sum(\alpha_\nu \sin \nu x - \beta_\nu \cos \nu x) \tag{1.4}$$

არის L^2 კლასის რაიმე ფუნქციის ფურიეს მწკვრივი. $\tilde{S}[f]$ არის $(C, 1)$ შეჯამებადი თითქმის ყველგან და (ზიგმუნდი, მესამე თავის თეორემა (3.20))-ის ძალით, არსებობს შეუღლებული $\tilde{f}(x)$ ფუნქცია და ის ტოლია თითქმის ყველგან (1.4)-ში მოცემული მწკვრივის $(C, 1)$ ჯამის. აქედან, $\tilde{S}[f] = S[\tilde{f}]$. პარსევალის ფორმულიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2 dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}^2 dx. \tag{1.5}$$

თეორემა 1.3. *მწკვრივი*

$$\frac{1}{2}a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\, nx + b_n \sin\, nx) = \sum_{0}^{\infty} A_n(x) \tag{1.6}$$

თითქმის ყველგან კრებადია, თუ $\sum(a_n^2 + b_n^2)\log^2 n$ *არის სასრული.*

Proof. პირობიდან გამომდინარეობს, რომ $\sum A_n(x)\log^2 n$ არის ფურიეს მწკვრივი. თუ გამოვიყენებთ თეორემა (4.4)-ს (ზიგმუნდი, III თავი) მივიღებთ დასამტკიცებელ დებულებას. □

კარლესონის[2] თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ (1.6)-ის თითქმის ყველგან კრებადობისთვის საკმარისია $\sum(a_n^2 + b_n^2)$-ის სარულობა.

2. მარცინკიევიჩის თეორემა

ფუნქციის თავისი ფურიეს მწკვრივით წარმოდგენის ამოცანებში უმნიშვნელოვანესია ფაქტი, რომ ყოველი ინტეგრებადი ფუნქცია არის მისი განუსაზღვრელი ინტეგრალის წარმოებული თ.ყ. მაგრამ, გარკვეულ საკითხებში საჭიროა ფუნქციათა სტრუქტურის და წერტილთა სიმრავლეების სიღრმისეულად შესწავლა. ამ მხვრივ მარცინკიევიჩის თეორემა არის მნიშვნელოვანი შედეგი.

თეორემა 2.1. *ვთქვათ,* P *არის ჩაკეტილი სიმრავლე* (a, b) *ინტერვალში და ვთქვათ,* $\chi(t) = \chi_P(t)$ *არის მანძილი* t *წერტილიდან* P *სიმრავლემდე. მაშინ*

(i) *ყოველი* $\lambda > 0$*-თვის, ინტეგრალი*

$$I_\lambda(x) = I_\lambda(x, P) = \int_a^b \frac{\chi^\lambda(t)}{|t-x|^{\lambda+1}}dt \tag{2.1}$$

არის სასრული P *სიმრავლის თითქმის ყველა წერტილისთვის; უფრო ზოგადად, თუ* f *არის ინტეგრებადი ფუნქცია* (a, b)*-ზე, მაშინ ინტეგრალი*

$$J_\lambda(x) = J_\lambda(x, f, P) = \int_a^b \frac{f(t)\chi^\lambda(t)}{|t-x|^{\lambda+1}}dt \tag{2.2}$$

აბსოლუტურად კრებადია P*-ზე თ.ყ. და*

$$\int_P |J_\lambda(x)|\, dx \le 2\lambda^{-1}\int_a^b |f(x)|dx. \tag{2.3}$$

(ii) *თუ* P *სიმრავლის ყოველი მოსაზღვრე ინტერვალის სიგრძე ნაკლებია* 1*-ზე, მაშინ ინტეგრალები*

$$I_0(x) = \int_a^b \frac{\{\log 1/\chi(t)\}^{-1}}{|t-x|}dt, \quad J_0(x) = \int_a^b \frac{f(t)\{\log 1/\chi(t)\}^{-1}}{|t-x|}dt \tag{2.4}$$

აბსოლუტურად კრებადია P*-ზე თ.ყ. და*

$$\int_P |J_0(x)|\, dx \le A\int_a^b |f(x)|dx, \tag{2.5}$$

სადაც A *არის* f*-გან დამოუკიდებელი მუდმივი.*

Proof. (i) ცხადია, საკმარისია განვიხილოთ J_λ. ვიგულისხმოთ, რომ $f \geq 0$, მაშინ $0 \leq J_\lambda(x) \leq \infty$. ჯერ ვაჩვენოთ (2.3), საიდანაც მივიღებთ $J_\lambda(x)$-ს სასრულობას P-ზე თ.ყ. შევნიშნოთ, რომ $\chi(t) = 0$, როცა $t \in P$ და $\chi(t)$-ს გრაფიკი P სიმრავლის მოსაზღვრე რაიმე d ინტერვალზე არის $\frac{1}{2}d$ სიმაღლის მქონე ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდები; ამასთან, $\chi(t)$ არის წრფივი P-ს მარცხნივ და მარჯვნივ.

(2.2)-ში შეგვიძლია საინტეგრაციო სიმრავლედ განვიხილოთ $Q = (a, b) - P$. მივიღებთ

$$\int_P J_\lambda(x)dx = \int_Q f(t)\chi^\lambda(t)\left\{\int_P \frac{dx}{|t-x|^{\lambda+1}}\right\}dt. \tag{2.6}$$

ინტეგრალში ცვლადის შეცვლა გამართლებულია, რადგან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის დადებითი. შევაფასოთ შიგა ინტეგრალი. თუ t არის P სიმრავლის მოსაზღვრე (α, β) ინტერვალის ფიქსირებული წერტილი, ვიგულისხმოთ, რომ t უფრო ახლოსაა α-თან, ვიდრე β-თან, მაშინ

$$\int_P \frac{dx}{|t-x|^{\lambda+1}} \leq 2\int_{t-\alpha}^{\infty} u^{-\lambda-1}du = 2\lambda^{-1}(t-\alpha)^{-\lambda} = 2\lambda^{-1}\chi^{-\lambda}(t). \tag{2.7}$$

შეფასება სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა t არის P-ს მარჯვნივ ან მარცხნივ. თუ (2.7)-ს გავითვალისწინებთ (2.6)-ში, მივიღებთ (2.3)-ს.

(ii) განვიხილოთ J_0 და ვიგულისხმოთ, რომ $f \geq 0$. თუ $\lambda = 0$ და $l = b - a$, მაშინ (2.7)-ის მარცხენა მხარე არ გადააჭარბებს

$$2\int_{t-\alpha}^{l} u^{-1}du = 2\log l - 2\log(t-\alpha) = 2\log l + 2\log 1/\chi(t) < A\log 1/\chi(t).$$

მეორე მხვრივ,

$$\int_P J_0(x)dx = \int_Q f(t)\{\log 1/\chi(t)\}^{-1}\left\{\int_P \frac{dx}{|t-x|}\right\}dt,$$

თუ გავითვალისწინებთ ბოლო ორ გამოსახულებას, მივიღებთ (2.5)-ს. □

ზოგჯერ შეგვიძლია გამოვიყენოთ $\chi(t)$ ფუნქციის მოდიფიკაცია. $\chi^*(t) = \chi_P^*(t)$-თი აღვნიშნოთ ფუნქცია, რომელიც არის 0-ის ტოლი, თუ $t \in P$ და $|d|$-ს ტოლია, თუ t ეკუთვნის P-ს მოსაზღვრე რაიმე d ინტერვალს.

თეორემა 2.2. *ინტეგრალები*

$$J_\lambda^*(x) = \int_a^b \frac{f(t)\chi^{*\lambda}(t)}{|t-x|^{\lambda+1}}dt, \quad J_0^*(x) = \int_a^b \frac{f(t)\{\log 1/\chi^*(t)\}^{-1}}{|t-x|}dt$$

კრებადია P-ზე თ.ყ.

Proof. საკმარისია განვიხილოთ J_λ^*. J_0^*-თვის დამტკიცება იქნება ანალოგიურად. ვიგულისხმოთ, რომ $f \geq 0$. რადგან $\chi(t) \leq \frac{1}{2}\chi^*(t)$ ყოველი t-თვის, როცა ის არის P-ს უკიდურეს წერტილებს შორის, ამიტომ J_λ^*-ის კრებადობა არის უფრო ძლიერი შედეგი, ვიდრე J_λ-ს კრებადობა.

ვთქვათ, მოცემულია $\varepsilon > 0$. ვიგულისხმოთ, რომ $Q_\varepsilon = \bigcup_{(\alpha,\beta)\in Q}(\alpha - \varepsilon/2, \beta + \varepsilon/2)$ (შესაძლებელია გაფართოებული ინტერვალების სიმრავლე გახდეს გადამფარავი) და $P_\varepsilon = (a,b) - Q_\varepsilon$. იქედან, რომ $Q_\varepsilon \supset Q$, $|Q_\varepsilon - Q| \le (b-a)\varepsilon \to 0$, როცა $\varepsilon \to 0$, მივიღებთ

$$P_\varepsilon \subset P,\ |P - P_\varepsilon| \to 0.$$

ადვილი შესამოწმებელია, რომ

$$\chi_P^*(t) \le 2\varepsilon^{-1}\chi_{P_\varepsilon}(t).$$

რადგან $J_\lambda(x,f,P_\varepsilon)$ სასრულია P_ε-ზე თ.ყ., ამიტომ იგივე შესრულდება $J_\lambda^*(x,f,P)$-თვის. თუ ε-ს მივასწრაფებთ ნულისკენ, მივიღებთ, რომ $J_\lambda^*(x,f,P)$ სასრულია P-ზე თ.ყ. $\square$

შენიშვნა 2.3. იმ შემთხვევაში, როცა P სიმრავლეები არის პერიოდული პერიოდით 2π, ზოგჯერ, $J_\lambda(x)$ ნაცვლად ჩვენ გამოვიყენებთ ინტეგრალს

$$J_\lambda'(x) = \int_0^{2\pi} \frac{f(t)\chi^\lambda(t)}{|2\sin\frac{1}{2}(x-t)|^{\lambda+1}}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)\chi^\lambda(x+t)}{|2\sin\frac{1}{2}t|^{\lambda+1}}dt. \tag{2.8}$$

თეორემა 2.1 შეიცვლება მცირედით; (2.3) უტოლობაში $\frac{2}{\lambda}$ მამრავლი შეიცვლება A_λ, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ λ-ზე:

$$\int_P \left|J_\lambda'(x)\right| dx \le A_\lambda \int_0^{2\pi} |f(x)|dx. \tag{2.9}$$

დამტკიცების გზა არის იგივენაირი, რაც თეორემა 2.1-ში.

3. შეუღლებული ფუნქციის არსებობა

თეორემა 3.1. *თუ $f \in L$, მაშინ*

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)]\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}t dt = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\pi \tag{3.1}$$

არსებობს თითქმის ყველა x-თვის.

თეორემა 3.2. *ვთქვთ, $F \in L$ არის პერიოდული და აქვს სასრული წარმოებული დადებითი ზომის E სიმრავლის ყოველ წერტილში. მაშინ ინტეგრალი*

$$F^*(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2}dt = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^\pi \tag{3.2}$$

არსებობს თითქმის ყველგან E-ზე.

Proof. შევნიშნოთ, რომ თეორემა 3.1 გამომდინარეობს თეორემა 3.2-დან თუ $a_0 = 0$, რომელიც არ მონაწილეობს $\tilde{f}$-ში. f ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი F იქნება პერიოდული და

$$\int_\varepsilon^\pi \frac{F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2}dt$$

$$= \frac{F(x+\varepsilon) + F(x-\varepsilon) - 2F(x)}{(2\sin\frac{1}{2}\varepsilon)^2} + \int_\varepsilon^\pi \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2\tan\frac{1}{2}t}dt. \tag{3.3}$$

ყოველ x წერტილზე, სადაც f არის დიფერენცირებადი, (3.3)-ის ინტეგრირებული ნაწილი კრებადია ნულისკენ ε-ის მიმართ და $F^*(x)$-ის არსებობა ექვივალენტურია $\tilde{f}(x)$-ის არსებობის. ამასთან, $F^*(x) = \tilde{f}(x)$.

ახლა დავუბრუნდეთ (3.3)-ს. სპეციალური შემთხვევა, როცა $F = \int f dx$, $f \in L^2$, განვიხილეთ პარ.1-ში. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $F^*(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან, თუ F არის L^2 კლასის რაიმე ფუნქციის განუსაზღვრელი ინტეგრალი, კერძოდ, თუ $F \in \Lambda_1$. ვთქვათ,

$$\rho(x,h) := [F(x+h) - f(x)]/h$$

და E_k-თი აღვნიშნოთ $x \in E_k$ წერტილთა სიმრავლე, რომელთათვისაც $\rho(x,h) \geq k$, როდესაც $|h| < 1/k$. აქედან,

$$E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_k \subset ... \subset E, \quad |E_k| \to |E|.$$

დავაფიქსიროთ k, ვთქვათ, $k = M$ და განვიხილოთ E_M სიმრავლის რაიმე ჩაკეტილი P ქვესიმრავლე. ვაჩვენოთ, რომ $F^*(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან P-ზე. რადგან $|E - P|$ არის ნებისმიერად მცირე, თეორემა 3.2-ის დასამტკიცებლად ეს საკმარისი იქნება. ჩვენი დაშვებიდან გამომდინარე,

$$|F(x+h) - F(x)| \leq M|h|, \quad x \in P, \, |h| \leq 1/M. \tag{3.4}$$

ვთქვათ, $G(x)$ არის ფუნქცია, რომელიც ემთხვევა F ფუნქციას P-ზე, ხოლო P-ს მოსაზღვრე $d_1, d_2, ...$ ჩაკეტილ ინტერვალებზე არის წრფივი. დავამტკიცოთ, რომ $G(x) \in \Lambda_1$. ამისათვის კი საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$|G(x+h) - G(x)| \leq A|h|, \, |h| \leq 1/M, \tag{3.5}$$

სადაც A არ არის დამოკიდებული x-სა და h-ზე. ვთქვათ, $h > 0$. ჩვენ განვიხილავთ ორ შემთხვევას:

(i) x და $x+h$, ორივე ეკუთვნის P-ს; (ii) $(x, x+h)$ ინტერვალის ბირთვი არ შეიცავს P-ს არცერთ წერტილს.

(i) (3.5) გამომდინარეობს (3.4)-დან.

(ii) ამ შემთხვევაში $(x, x+h)$ შედის P-ს მოსაზღვრე რაიმე d ინტერვალში და აქ G არის წრფივი. აქედან, თუ $|d| \leq M$, (3.5) კვლავ გამომდინარეობს (3.4)-დან და ამ შემთხვევაში $A = M$. რადგან არსებობს მხოლოდ სასრული რაოდენობის d ინტერვალები, რომლისთვისაც $|d| > 1/M$, ამიტომ (3.5) ყოველთვის არის სამართლიანი (ii) შემთხვევაში, თუ A-ს ავიღებთ საკმარისად დიდს.

თუ (i) და (ii) არ სრულდება, მაშინ $(x, x+h)$-ის ბირთვი შეიცავს P-ს რაიმე წერტილს. ვთქვათ, $x+h_1$ და $x+h_2$, $h_1 < h_2$, არის P-ს უკიდურესი წერტილები $(x, x+h)$ ინტერვალში. G ფუნქციის აბსოლუტური ნაზრდი $(x, x+h)$-ზე არ გადააჭარბებს $(x, x+h_1)$, $(x+h_1, x+h_2)$ და $(x+h_2, x+h)$ ინტერვალებზე აბსოლუტური ნაზრდების ჯამს და (i) და (ii)-ის ძალით, თითოეული

წევრი არაუმეტეს A-ჯერ მეტია შესაბამისი ინტერვალის სიგრძეზე. ეს ნიშნავს, რომ სრულდება (3.5), საიდანაც მივიღებთ, რომ $G \in \Lambda_1$.

ვთქვათ, $H(x) = F(x) - G(x)$, მაშინ

$$F(x) = G(x) + H(x). \tag{3.6}$$

(3.4) და (3.5) შეფასებებიდან მივიღებთ, რომ $H(x)$ აკმაყოფილებს (3.4)-ის მსგავს უტოლობას, სადაც M-ის მაგივრად გვექნება $M' = M + A$. რადგან $H(x)$ იგივურად ნულია P-ზე, ამიტომ P-ს გარეთ არსებულ ინტერვალებზე, გარდა სასრული რაოდენობისა, სრულდება უტოლობა

$$|H(x)| \leq M'\chi(x), \tag{3.7}$$

სადაც $\chi(x)$ არის მანძილი P-დან x-მდე.

G და H ფუნქციები იქნებიან პერიოდულები. თეორმა (3.2) დამტკიცებული იქნება თუ ვაჩვენებთ, რომ $G^*(x)$ და $H^*(x)$ ინტეგრალები არსებობს თითქმის ყველგან P-ზე. $G^*(x)$-თვის უკვე დამტკიცებული გვაქვს, რადგან $G \in \Lambda_1$. განვიხილოთ $H^*(x)$. თუ $x \in P$ მაშინ $H(x) = 0$ და (3.7)-დან გვაქვს:

$$H^*(x) = \int_0^{1/M} \frac{H(x+t) + H(x-t) - 2H(x)}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2} dt \leq M' \int_{-1/M}^{1/M} \frac{\chi(x+t)}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2} dt \tag{3.8}$$

მარჯვენა მხარეში მოცემული ინტეგრალი სასრულია თითქმის ყველგან P-ში. ჩვენ აგრეთვე შეგვიძლია გამოვიყენოთ I_λ-ს სასრულობა (2.1)-დან. აქედან გამომდიუნარეობს, რომ იგივე სრულდება მარცხენა მხარეში მოცემული ინტეგრალისთვის და ინტეგრალის სასრულობა არ დაირღვევა, თუ საინტეგრაციო შუალედს შევცვლით $(0, \pi)$ შუალედით. მაშასადამე, $H^*(x)$ ინტეგრალი აბსოლუტურადაც კი კრებადია თითქმის ყველგან P-ზე. თეორემა (3.2) დამტკიცებულია. $\square$

ამ დამტკიცებაში ჩვენ ვიგულისხმეთ, რომ E_k სიმრავლეები არიან ზომადები(ჩავთვალეთ, რომ არსებობს ჩაკეტილი ქვესიმრავლე P). ამის დასამტკიცებლად საკმარისია, რომ ნებისმიერი ფიქსირებული α-სთვის, ფუნქცია

$$\rho(x) = \rho(x;\alpha) = \sup_{0<|t|<\alpha} \left| \frac{F(x+t) - F(x)}{t} \right|$$

არის ქვედა ნახევრად უწყვეტი, ეს ნიშნავს რომ $\liminf_{x\to x_0} \rho(x) \geq \rho(x_0)$. ეს უტოლობა სამართლიანია თუ $\frac{F(x+t)-F(x)}{t}$ გამოსახულების ნაცვლად წარმოვიდგენთ ქორდის დახრის კუთხეს. თუ F არის უწყვეტი x_0 წერტილში და თუ x_1, $|x_1 - x_0| < \alpha$, არის ისეთი, რომ $P_0(x_0, F(x_0))$ და $P_1(x_1, F(x_1))$ წერტილების შემაერთებელი ქორდის დახრის კუთხის ტანგენსის აბსოლუტური მნიშვნელობა მეტია $\rho(x_0) - \varepsilon$, მაშინ PP_1 ქორდის დახრის კუთხის ტანგენსის აბსოლუტური მნიშვნელობა გადააჭარბებს $\rho(x_0) - 2\varepsilon$-ს, როცა P წერტილის აბცისა ძალიან ახლოს არის x_0-თან, შესაბამისად მოცემული უტოლობა სამართლიანია. თუ F არ არის უწყვეტი x_0 წერტილში მაშინ უტოლობის ორივე მხარე არის $+\infty$.

თეორემა (3.2) და III თავის თეორემა (7.15)-დან გამომდინარეობს, რომ

თეორემა 3.3. *თუ $F(x)$ არის პერიოდული და ინტეგრებადი, ის არის დიფერენცირებადი დადებითი ზომის E სიმრავლეში, მაშინ $\tilde{S}'[F]$ არის A შეჯამებადი (3.2)-სკენ თითქმის ყველგან E-ში.*

$\tilde{f}(x)$-ის არსებობის საკითხი არ არის ტრივიალური, იმ შემთხვევაშიც კი როცა $f(x)$ უწყვეტია. $\tilde{f}$-ის არსებობისთვის საკმარისი არაა $f(x+t)-f(x-t)$-ის სიმცირე, როცა $|t|$-არის უსასრულოდ მცირე, რადგან დადებითი და უარყოფითი მნიშვნელობები არეულია ერთმანეთში. მართლაც, ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ არსებობს ისეთი f უწყვეტი ფუნქცია, რომ

$$\int_0^{\pi}\left|\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\right|dt \tag{3.9}$$

განშლადია ყოველ x წერტილში. მაგალითი ცოტათი გაგვიმარტივდება, თუ ჩვენ განვიხილავთ ფუნქციას პერიოდით 1 და (3.9)-ში ინტეგრალის ზედა საზღვარს შევცვლით 1-ით. დასაწყისში გვჭირდება შემდეგი ლემა:

ლემა 3.4. *ვთქვათ $g(x)$ არის პერიოდული ფუნქცია პერიოდით 1 ისეთი, რომ $|g(x)| \le 1$, $|g'(x)| \le 1$, და x-ის არსერთი მნიშვნელობისთვის სხვაობა $g(x+u)-g(x-u)$ არ არის იგივურად ნული u წერტილში. მაშინ*

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t}dt \ge C\log n, \int_0^1 \frac{|g(nx+nt)-g(nx-nt)|}{t}dt \ge C_1\log n$$

ყოველი $n = 1, 2, ...,$-სთვის, C და C_1 არიან n-სგან დამოუკიდებელი დადებითი მუდმივები.

ვთქვათ $nx = y$, $nt = u$. რადგან g არის პერიოდული, ამიტომ პირველი ინტეგრალი იქნება

$$\int_0^1 |g(y+u)-g(y-u)|\sum_{\nu}^{n-1}\frac{1}{u+\nu}du \ge \left(\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{\nu}\right)\int_0^1 |g(y+u)-g(y-u)|du.$$

მარჯვენა მხარის პირველი მამრავლი არის $\log n$ რიგის და მეორე ნაწილი, როგორც y ცვლადის უწყვეტი, პერიოდული ფუნქცია, რომელიც არცერთ წერტილში არ ხდება ნულის ტოლი, დადებითი რიცხვით ქვემოდან შემოსაზღვრულია. ანალოგიურად, ჩვენ მივიღებთ მეორე ნაწილსაც იმის გათვალისწინებითაც, რომ

$$\int_0^1 |g(y+u)-g(y-u)|u^{-1}du < \infty.$$

შემოვიღეთ აღნიშვნა, ვთქვათ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(\lambda_n x), \tag{3.10}$$

სადაც რიცხვები $a_n > 0$ და ნატურალური რიცხვები $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ განსაზღვრული იქნება მოგვიანებით. მაშინ

$$\int_{1/\lambda_\nu}^1 \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t}dt \ge a_\nu \int_{1/\lambda_\nu}^1 \frac{|g(\lambda_\nu x+\lambda_\nu t)-g(\lambda_\nu x-\lambda_\nu t)|}{t}dt-$$

$$-\left(\sum_{n=1}^{\nu-1}+\sum_{n=\nu+1}^{\infty}\right)a_n\int_{1/\lambda_\nu}^1 \frac{|g(\lambda_\nu x+\lambda_\nu t)-g(\lambda_\nu x-\lambda_\nu t)|}{t}dt \ge$$

(3.11) $$\geq Ca_\nu \log\lambda_\nu - C_1\sum_{n=1}^{\nu-1} a_n\log\lambda_n - 2\log\lambda_\nu \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n,$$

რადგან $|g(\lambda_\nu x+\lambda_\nu t)-g(\lambda_\nu x-\lambda_\nu t)|\leq 2$. თუ $a_n=\frac{1}{n!}$, $\lambda_n=2^{(n!)^2}$, მაშინ (3.11)-ის მარჯვენა მხარე, გაყოფილი $\nu!$-ზე, მიისწრაფვის $C\log 2>0$-კენ, საიდანაც გამომდინარეობს (3.9) განშლადია ყოველ წერტილში.

საინტერესოა, რომ ინტეგრალები

(3.12) $$\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x)}{t}dt,\ \int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x-t)-2f(x)}{t}dt$$

რომლებიც ექვივალენტურები არიან (3.1)-ში მოცემული ინტეგრალების, შეიძლება განშლადი იყოს ყოველ წერტილში უწყვეტი f ფუნქციისთვისაც კი. მტკიცება ანალოგიურია ზემოთ მოცემულის.

თეორემა 3.5. *თუ $f\in L$, $y>0$ და $E_y=E_y(f)$, სადაც $|\tilde f(x)|>y$ მაშინ*

(3.13) $$|E_y|\leq \frac{A}{y}\int_0^{2\pi}|f(x)|dx,$$

სადაც A არის აბსოლუტური მუდმივი.

Proof. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f\geq 0$. მართლაც, თუ $f=f_1+f_2$, მაშინ $E_{2y}(f)\subset E_y(f_1)+E_y(f_2)$.

(3.14) $$|E_{2y}(f)|\leq |E_y(f_1)|+|E_y(f_2)|.$$

აქედან, თუ f_1 და f_2 არიან f ფუნქციის დადებითი და უარყოფითი ნაწილები და თეორემა თუ სრულდება f_1 და f_2 ფუნქციებისთვის, მაშინ ის სრულდება f ფუნქციისთვისაც.

ჩვენ ასევე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

(3.15) $$\int_0^{2\pi} fdx=1.$$

ფუნქცია $F(x)=\int_0^x fdt$ არის არაკლებადი $(-\infty,+\infty)$ შუალედზე და

(3.16) $$\tilde f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{F(x+t)+F(x-t)-2F(x)}{(2\sin\frac{1}{2}t)^2}dt$$

თითქმის ყველგან.

დავაფიქსიროთ y და Q-თი აღვნიშნოთ იმ x-ების სიმრავლე, რომელთათვისაც

(3.17) $$\frac{F(\xi)-F(x)}{\xi-x}>y$$

რაიმე ξ-თვის $(x,x+2\pi)$-ს ბირთვიდან. Q არის ღია(შესაძლოა ცარიელიც) და პერიოდული. მისი დამატება P არის ჩაკეტილი. თუ P და Q არ არიან ცარიელები, მაშინ Q არის ისეთი თანაუკვეთი, ღია (a_i,b_i) ინტერვალების გაერთიანება, რომელთათვისაც

(3.18) $$\frac{F(b_i)-F(a_i)}{b_i-a_i}=y.$$

ეს ფაქტი შეგვიძლია დავამტკიცოთ იმავე გზით, როგორც დამტკიცებულია I თავის ლემა (13.8).

ვთქვათ, $F = G + H$, სადაც G ემთხვევა F-ს P სიმრავლეზე და წრფივია ყოველ (a_i, b_i) ინტერვალზე; აქედან. $H = 0$ P-ზე. თუ Q ცარიელი სიმრავლეა, მაშინ $F = G, H = 0$, და ამ შემთხვევაში, ქვემოთ მოცემულ მსჯელობაში უგულებელვყოფთ H-ს. $G(x)$ ფუნქცია ეკუთვნის Λ_1-ს. უფრო ზუსტად

$$0 \leq \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \leq y, \;\; 0 < h < 2\pi$$

პირველი უტოლობა არის ცხადი, რადგან G ფუნქცია F-ის მსგავსად არის არაკლებადი. მეორე უტოლობაც ცხადია, თუ x და $x + h$ ორივე ეკუთვნის P-ს ან მის რაიმე მოსაზღვრე ინტერვალს. ზოგადი შემთხვევა გამომდინარეობს იმავე არგუმენტებიდან, რაც გამოვიყენეთ თეორემა 3.2-ის დამტკიცებაში.

აქედან, G არის განუსაზღვრელი ინტეგრალი რაიმე პერიოდული $g = G'$ ფუნქციიდან. ამიტომ $0 \leq g(x) \leq y$ თითქმის ყველა x-თვის და $g(x) = f(x)$ თითქმის ყველგან P-ში(რაგდან G=F P-ში). ცხადია, H არის განუსაზღვრელი ინტეგრალი $h = H'$ ფუნქციიდან და

$$f = g + h, \;\; \tilde{f} = \tilde{g} + \tilde{h}.$$

რადგან P სიმრავლეში $H = 0$, ინტეგრალი h ფუნქციიდან ყოველ $(a_i.b_i)$ ინტერვალზე არის $H(b_i) - H(a_i) = 0$ და

(3.19) $$\int_{a_i}^{b_i} f dx = \int_{a_i}^{b_i} g dx \;\; (i = 1, 2, ...), \;\; \int_0^{2\pi} f dx = \int_0^{2\pi} g dx.$$

რადგან $|E_{2y}(f)| \leq |E_y(g)| + |E_y(h)|$, ამიტომ საკმარიცია ვაჩვენოთ, რომ მარჯვენა მხარის ორივე წევრი მაჟორირდება შემდეგი სიდიდით:

$$\frac{A}{y} \int_0^{2\pi} f dx = \frac{A}{y}.$$

g ფუნქციისთვის (3.19)-დან გვაქვს

$$|E_y(g)| \leq y^{-2} \int_0^{2\pi} g^{-2} dx \leq y^{-2} \int_0^{2\pi} g^2 dx \leq y^{-1} \int_0^{2\pi} g dx = y^{-1} \int_0^{2\pi} f dx.$$

საჩვენებელი დაგვჩა შეფასება $|E_y(h)|$-თვის. თავდაირველად შევკრიბოთ $b_i - a_i$ შესაკრებები პერიოდში. (3.18)-დან მივიღებთ

(3.20) $$|Q| = \sum (b_i - a_i) \leq \frac{F(2\pi) - F(0)}{y} = \frac{1}{y} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{y}.$$

.

ვთქვათ, $\chi^*(x)$ არის ფუნქცია, რომელიც ყოველ (a_i, b_i) ინტერვალზე $b_i - a_i$-ის, ხოლო P-ზე 0-ის ტოლია. ვაჩვენოთ, რომ

(3.21) $$H(x) \leq y\chi^*(x).$$

ეს უტოლობა ცხადია თუ x ეკუთვნის P სიმრავლეს, რადგან ორივე მხარე არის 0. თუ $a_i < x < b_i$, მაშინ

$$0 \leq F(x) - F(a_i) \leq y(x - a_i), \;\; 0 \leq G(x) - G(a_i) \leq y(x - a_i);$$

და ტოლობებიდან $H(a_i) = 0,\ H = F - G$ გამომდინარეობს, რომ

$$|H(x)| = |H(x) - H(a_i)| \leq y(x - a_i) < y(b_i - a_i),$$

საიდანაც მივიღებთ (3.21)-ს.

ვთქვათ,

$$I(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi^*(t)}{(2\sin\frac{1}{2}(x-t))^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi^*(x+t)}{(2\sin\frac{1}{2}(t))^2}dt.$$

გავითვალისწინოთ (3.21) და 3.16-ში f-ის ნაცვლად განვიხილოთ h. მივიღებთ, რომ

$$|\tilde{h}(x)| \leq yI(x), \;\; x \in P. \tag{3.22}$$

ვთქვათ, Q^* არის სიმრავლე, რომელიც მიიღება ყოველი ყოველი (a_i, b_i) ინტერვალის კონცენტრულად სამჯერ გაფართოებით და P^* არის Q^*-ს დამატება. მაშინ გვაქვს

$$\int_{P^*} I(x)dx \leq B|Q|, \tag{3.23}$$

სადაც B არის აბსოლუტური მუდმივი; ეს არის (2.9)-ის ანალოგიური შედეგი და დამტკიცებაც არის იგივე. ახლა უკვე ადვილია შევაფასოთ $E_y(h)$. $E_y(h)$-ის Q^* სიმრავლესთან თანაკვეთის ზომა არ არის მეტი $|Q^*| \leq 3Q$-ზე. P-ში და უფრო მეტიც, P^*-ში, ჩვენ გვაქვს (3.22), აგრეთვე, თუ $|\tilde{h}(x)| > y$, მაშინ $I(x) > 1$. მაგრამ, (3.23)-ის ძალით, P^*-ის ქვესიმრავლეს, რომლისთვისაც $I(x) > 1$, აქვს ზომა, რომელიც არ არის მეტი $B|Q|$-ზე. მაშასადამე, თუ გამოვიყენებთ ამ შედეგებს და (3.20)-ს, მივიღებთ

$$|E_y(h)| \leq 3|Q| + B|Q| \leq (B+3)y^{-1}.$$

თეორემა 3.5 დამტკიცებულია. □

4. ფუნქციათა კლასები და ფურიეს მწკრივების $(C,1)$ საშუალოები

ჩვენ ვიცით, რიცხვები c_ν $(\nu = 0, \pm1, \pm2, ...)$ რომ იყოს L^2 კლასის ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები, აუცილებელია და საკმარისია, რომ ჯამი $\sum |c_\nu|^2$ იყოს სასრული. ბუნებრივია ჩნდება კითხვა შესაძლებელია თუ არა რომ ასევე ადვილად დამტკიცდეს აღნიშნული დებულება $L^r (r \neq 2)$ კლასებისთვის. პასუხი არის არა და ამიტომ პარსევალის ფორმულა და რისი-ფიშერის თეორემა კვლევებისთვის მნიშვნელობანი იარაღია. ჩვენ ამ პარაგრაფში განვიხილავთ სხვადასხვა კრიტერიუმებს ჩეზაროს და აბელის საშუალოებისთვის.

შემდგომში გავითვალისწინებთ, რომ (C,1) გული და აბელის გული აკმაყოფილებენ (A), (B) და (C) პირობებს, რომლებიც ჩამოყალიბებულია III თავის მე-2 პარაგრაფში (ამასთან, ორივე გული დადებითია), და აგრეთვე $S[f]$ შეჯამებადია ამ მეთოდებით. მსჯელობები სამართლიანი

იქნება სხვა გულებისთვისაც , თუ ისინი აკმაყოფილებენ აღნიშნულ თვისებებს. ლოგიკურად, $(C,1)$ მეთოდი არის უფრო მარტივი, ვიდრე აბელის მეთოდი, მაგრამ ეს უკანასკნელი ხშირად უფრო მნიშვნელოვანია , განსაკუთრებით ჰარმონიული და ანალიზური ფუნქციების გამოყენებებში.

ჩვენ მივყვებით შემდეგ კურსს: მე-4 და მე-5 პარაგრაფებში შედეგები დამტკიცებული იქნება $(C,1)$ საშუალოებისთვის, ხოლო მე-6 პარაგრაფში ანალოგიური დებულებები აბელის საშუალოებისთვის მოყვანილი იქნება დაუმტკიცებლად.

ამის გარდა, I თავის მე-9 პარაგრაფში შემოღებულ იქნა კლასები L_ϕ, ჩვენ განვიხილავთ ფუნქციათა სხვა კლასებს. სიმბოლოებით B, C, A და V აღვნიშნავთ, შესაბამისად შემოსაზღვრულ, უწყვეტ, აბსოლუტურად უწყვეტ და სასრული ვარიაციის პერიოდულ ფუნქციათა კლასებს. თუ

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu x} \tag{4.1}$$

არის განსაზღვრული კლასის ფუნქციის ფურიეს მწკრივი. ვიტყვით, რომ თვითონ ეს მწკრივიც ეკუთვნის ამ კლასს. S სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ფურიე-სტილტიესის მწკრივების კლასს. (4.1) მწკრივის $(C,1)$ საშუალოებს აღვნიშნავთ $\{\sigma_n(x)\}$-ით.

თეორემა 4.1. *(i) იმისთვის, რომ $\sum c_\nu e^{i\nu x}$ ეკუთვნოდეს C კლასს აუცილებელი და საკმარისია რომ $\{\sigma_n(x)\}$ იყოს თანაბრად კრებადი,*

(ii) იმისთვის, რომ $\sum c_\nu e^{i\nu x}$ ეკუთვნოდეს B კლასს აუცილებელი და საკმარისია რომ $\{\sigma_n(x)\}$ იყოს თანაბრად შემოსაზღვრული.

Proof. (i) ნაწილში აუცილებლობა გამომდინარეობს ფეიერის თეორემიდან. საკმარისობის დასამტკიცებლას შევნიშნოთ, რომ $n \geq k$-თვის ,

$$\left(1+\frac{|k|}{n+1}\right)c_k = \int_0^{2\pi} \sigma_n(x)e^{-ikx}dx.$$

როცა $n \to \infty$ მარცხენა მხარე მიისწრაფვის c_k-კენ და მარჯვენა მხარე კრებადია უწყვეტი $f(x) = \lim \sigma_n(x)$ ფუნქციის ფურიეს k-ური კოეფიციენტისკენ.

(ii) პირობის აუცილებლობა არის III თავში მოცემული თეორემა 2.30-ის კერძო შემთხვევა: თუ K არის $|f|$-ის არსებითი ზედა საზღვარი, მაშინ $|\sigma_n(x)| \leq K$. პირიქით, თუ $|\sigma_n| \leq K$, მაშინ საკმარისად დიდი n-თვის

$$K^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n|^2 dx = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)^2 \geq \sum_{k=-\nu}^{\nu} |c_k|^2 \left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)^2,$$

სადაც ν არის რაიმე ფიქსირებული დადებითი მთელი რიცხვი, რომელიც არ არის მეტი n-ზე. თუ გადავალთ ზღვარზე $n \to \infty$ მივიღებთ, რომ

$$|c_{-\nu}|^2 + ... + |c_0|^2 + ... + |c_\nu|^2 \leq K^2,$$

ეს შეფასება სამართლიანია ყოველი ν-თვის. აქედან გვაქვს, რომ $\sum |c_k|^2$ კრებადია და რისი-ფიშერის თეორემის ძალით (4.1) არის $S[f]$ რაიმე $f \in L^2$ კლასის ფუნქციისთვის. მაშასადამე $\sigma_n(x) \to f(x)$ თითქმის ყველგან. ამიტომ, უტოლობიდან $|\sigma_n| \leq K$ გამომდინარეობს, რომ $|f(x)| \leq K$ თითქმის ყველგან. □

თეორემა 4.2. *$\sum c_\nu e^{i\nu x}$ მწკვრივი ეკუთვნის S კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $||\sigma_n||_1 = O(1)$*

Proof. დასაწყისისთვის ვიგულისხმოთ, რომ $\sum c_\nu e^{i\nu x}$ არის $S[dF]$. მაშინ

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t-x) dF(t)$$

$$|\sigma_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_n(t-x) |dF(t)|, \tag{4.2}$$

სადაც $|dF(t)|$-ს ნაცვლად შეგვიძლია განვიხილოთ $dV(t)$, $V(t)$-თი აღნიშნულია F-ის ვარიაცია $(0,t)$-ინტერვალზე. ვთქვათ $V = V(2\pi)$. უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა მხარე არის ტრიგონომეტრიული პოლინომი x წერტილში, რომლის მუდმივი წევრია $V/2\pi$. ვაინტეგროთ $0 \leq x \leq 2\pi$ ინტერვალზე, მივიღებთ

$$||\sigma_n||_1 \leq \int_0^{2\pi} |dF(t)| = V, \tag{4.3}$$

მაშასადამე, თეორემა (4.2)-ის ერთი ნაწილი დამტკიცებულია. მეორე ნაწილის დამტკიცებისთვის გვჭირდება შემდეგი ცნობილი თეორემა:

თეორემა 4.3. *ჰელის თეორემა.ვთქვათ $\{F_n(x)\}$ არის თანაბრად შემოსაზღვრული და თანაბრად სასრული ვარიაციის ფუნქციათა მიმდევრობა (a,b) ინტერვალში. მაშინ არსებობს $\{F_{n_k}(x)\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც (a,b)-ს ყოველ წერტილში კრებადია სასრული ვარიაციის რაიმე $F(x)$ ფუნქციისკენ.*

ამ თეორემაში თანაბრად შემოსაზღვრულობის პირობა შეიძლება შევცვალოთ რაიმე x წერ-ტილში $\{F_n\}$-ის შემოსაზღვრულობით. რადგან პირველი გამომდინარეობს მეორედან და თანაბ-რად სასრული ვარიაციულობიდან.

დავუბრუნდეთ თეორემა 4.2-ს, ვიგულისხმოთ რომ $||\sigma_n||_1 \leq V$ ყოველი n-თვის და ვთქვათ,

$$F_n(x) = \int_0^x \sigma_n(t) dt.$$

$F_n(x)$ ფუნქცია არის თანაბრად სასრული ვარიაციის $(0,2\pi)$-ში და ნულის ტოლია როცა $x = 0$. ჰელის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $\{F_{n_j}(x)\}$ ქვემიმდევრობა, რომელიც არის თანაბრად შემოსაზღვრული და ყოველ წერტილში კრებადია $F(x)$ ფუნქციისკენ (მისი ვარიაცია არ არის მეტი V-ზე) $(0,2\pi)$ ინტერვალში. თუ $|k| \leq n_j$, ნაწილობითი ინტეგრებით და $j \to \infty$ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ

$$\left(1 - \frac{|k|}{n_j+1}\right) c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_{n_j} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} F_{n_j}(2\pi) + \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_{n_j} e^{-ikx} dx,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}F(2\pi) + \frac{ik}{2\pi}\int_0^{2\pi} Fe^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}dF(x),$$

რადგან $F(0) = 0$. აქედან გამომდინარეობს, რომ (4.1) არის $S[dF]$, რაც ამტკიცებს თეორემა 4.2-ს სრულად. ეს თეორემა შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგი ექვივალენტური ფორმით: □

თეორემა 4.4. *იმისათვის, რომ $\sum c_\nu e^{i\nu x}$ ეკუთვნოდეს V კლასს აუცილებელია და საკმარისია, რომ $||\sigma_n'||_1 = O(1)$, ანუ σ_n მიმდევრობა უნდა იყოს თანაბრად სასრული ვარიაციის.*

შემდეგი დებულება ავსებს თეორემა 4.2-ს

თეორემა 4.5. *იმისათვის, რომ $\sum c_\nu e^{i\nu x}$ ეკუთვნოდეს $S[dF]$ კლასს, როცა F არის არაკლებადი, აუცილებელია და საკმარისია, რომ შესრულდეს $\sigma_n \geq 0$ ყოველი n-თვის.*

აუცილებლობა გამომდინარეობს (4.2)-დან, რადგან $K_n(u) \geq 0$. პირიქით, თუ $\sigma_n(x) \geq 0$, მაშინ $F_n(x)$ ფუნქციები, რომლებიც განსაზღვრულია თეორემა 4.2-ის დამტკიცებაში არიან არაკლებადები, ამიტომ $F(x) = \lim F_{n_j}(x)$.

თეორემა 4.6. *იმისათვის, რომ $\sum c_\nu e^{i\nu x}$ ეკუთვნოდეს $S[dF]$ კლასს, როცა F არის არაკლებადი, აუცილებელია და საკმარისია, რომ*

$$\sum_{\mu,\,\nu=0}^{n} c_{\mu-\nu}\xi_\mu\bar{\xi}_\nu \geq 0 \tag{4.4}$$

ყოველი $n \geq 0$-თვის და ყოველი (კომპლექსური) $\xi_0, \xi_1, \xi_2, ...$ რიცხვისთვის.

Proof. თუ $c_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\nu x}dF$ არაკლებადი F-თვის, მაშინ

$$2\pi\sum_{\mu,\,\nu=0}^{n} c_{\mu-\nu}\xi_\mu\bar{\xi}_\nu = \int_0^{2\pi}\left(\sum_{\mu,\,\nu=0}^{n} e^{-i(\mu-\nu)x}\xi_\mu\bar{\xi}_\nu\right)dF = \int_0^{2\pi}\left|\sum_0^n e^{-i\mu x}\xi_\mu\right|^2 dF \geq 0$$

პირიქით, თუ $\xi_\nu = e^{i\nu x}$ ყოველი ν-თვის და σ_n-ით აღვნიშნავთ $\sum c_\nu e^{i\nu x}$ მწკვრივის $(C,1)$ საშუალოებს, მაშინ (4.4)-ის მარცხენა მხარე იქნება

$$(n+1)c_0 + n(c_1e^{ix} + c_{-1}e^{-ix}) + ... + (c_ne^{inx} + c_{-n}e^{-inx}) = (n+1)\sigma_n(x),$$

ამ ტოლობიდან და თეორემა 4.5-დან გამომდინარეობს საკმარისობა. □

u^+ და u^- სიმბოლოებით შესაბამისად აღვნიშნოთ $\max(u,0)$ და $\max(-u,0)$, ცხადია

$$u^+ = \frac{1}{2}(|u|+u),\;\; u^- = \frac{1}{2}(|u|-u). \tag{4.5}$$

რადგან $(0,2\pi)$ ინტერვალზე ინტეგრალი σ_n-დან არის მუდმივი ($2\pi c_0$), ამიტომ (4.5)-ის პირველი უტოლობა გვიჩვენებს, რომ პირობები

$$||\sigma_n||_1 = O(1),\;\; ||\sigma_n^+||_1 = O(1)$$

არიან ექვივალენტურები.

თეორემა 4.7. *ვთქვათ,* $\sum c_\nu e^{i\nu x}$ *არის* $S[dF]$ *და*

$$F(x) = \frac{1}{2}[F(x+0) + F(x-0)] \tag{4.6}$$

ყოველი x*-თვის.* V, P, N *სიმბოლოებით შესაბამისად აღვნიშნოთ* F *ფუნქციის სრული, დადებითი და უარყოფითი ვარიაციები* $\alpha \leq x \leq \beta$ *ინტერვალზე. მაშინ*

$$\int_\alpha^\beta |\sigma_n| dx \to V, \quad \int_\alpha^\beta |\sigma_n^+| dx \to P, \int_\alpha^\beta |\sigma_n^-| dx \to N \tag{4.7}$$

Proof. რადგან $S[dF] = S'[F]$ (II თავი, (2.4)), (4.6)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\int_\alpha^\beta \sigma_n dx \to F(\beta) - F(\alpha) \tag{4.8}$$

(III თავი, (3.4)). (4.7)-ის პირველი ფორმულის დამტკიცება საკმარისია, რადგან დანარჩენი ორი გამომდინარეობს ამ გამოსახულებიდან (4.8), (4.5) ფორმულების გამოყენებით და

$$2P = V + (F(\beta) - F(\alpha)), \; 2N = V - (F(\beta) - F(\alpha)).$$

ცხადია $\liminf ||\sigma_n; \alpha, \beta||_1 \geq V$. (4.8)-ის ძალით, ფუნქციები $F_n x = \int_\alpha^x$ კრებადია $F(x) - F(\alpha)$-კენ (α, β) ინტერვალზე და $||\sigma_n; \alpha, \beta||_1$ არის F_n-ის სრული ვარიაცია (α, β)-ზე. ზღვარითი ფუნქციის V ვარიაციამ არ შეიძლება გადააჭარბოს F_n ფუნქციების ვარიაციების ზღვარს. მაშასადამე, საჩვენებელი დაგვრჩა, რომ $\limsup ||\sigma_n; \alpha, \beta||_1 \leq V$.თუ (α, β) ემთხვევა $(0, 2\pi)$-ს, მაშინ ის გამომდინარეობს (4.3)-დან და თეორემა 4.7 სამართლიანი იქნება ამ კერძო შემთხვევისთვის. თუ $\beta - \alpha < 2\pi$, დავუშვათ, რომ უტოლობა, რომლის დამტკიცებასაც ვაპირებთ არის მცდარი. თუ V' არის F-ის სრული ვარიაცია ჩაკეტილ $(\beta, \alpha + 2\pi)$ ინტერვალზე, მივიღებთ

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} |\sigma_n| dx \to V + V', \quad \limsup \int_\alpha^\beta |\sigma_n| dx > V.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\liminf ||\sigma_n; \beta, \alpha + 2\pi||_1 < V'$ რაც ეწინააღმდეგება უკვე დამტკიცებულ უტოლობას (როცა α, β გვქონდა $\beta, \alpha + 2\pi$-ის მაგივრად). თეორემა 4.7 დამტკიცებულია.

□

ვიცით, რომ $\sigma_n(x, dF) \to F'$ თითქმის ყველგან(III თავი, (8.1)) და შემდგომში ზოგჯერ $F'(x)$-ის ნაცვლად დავწერთ $\sigma(x)$-ს$(= \lim \sigma_n(x))$.

ვთქვათ, $P(x)$ არის $F(x)$-ის დადებითი ვარიაცია (a, x)-ზე და ვთქვათ

$$P(x) = P_a(x) + P_s(x)$$

არის P ფუნქციის დაშლა აბსოლუტურად უწყვეტ და სინგულარულ ნაწილებად. ორივე, $P_a(x)$ და $P_s(x)$ არის არაუარყოფითი და არაკლებადი $x \geq \alpha$-თვის. აგრეთვე, როგორც კარგად არის ცნობილი, თითქმის ყველგან სამართლიანია ტოლობები:

$$P_s'(x) = 0, \;\; P_a'(x) = P'(x) = (F'(x))^+ = \sigma^+(x).$$

თეორემა 4.7-დან,

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma_n^{-}dx \to \{P_a(\beta)-P_a(\alpha)\}+\{P_s(\beta)-P_s(\alpha)\}=\int_{\alpha}^{\beta}\sigma^{+}dx+P_s(\beta). \tag{4.9}$$

$P(x)$ რომ იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი (α,β) ინტერვალზე, აუცილებელი და საკმარისია რომ $P_s(\beta)=0$, ან

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma_n^{+}dx \to \int_{\alpha}^{\beta}\sigma^{+}dx. \tag{4.10}$$

ანალოგიურად, $N(x)$, უარყოფითი ვარიაცია F ფუნქციისა, რომ იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი (α,β) ინტერვალზე აუცილებელი და საკმარისია, რომ

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma_n^{-}dx \to \int_{\alpha}^{\beta}\sigma^{-}dx/ \tag{4.11}$$

თუ $P(x)$ და $N(x)$ ორივე აბსოლუტურად უწყვეტია, მაშინ (4.10) და (4.11) გამოსახულებების შეკრებით მივიღებთ

$$\int_{\alpha}^{\beta}|\sigma_n|dx \to \int_{\alpha}^{\beta}|\sigma|dx, \tag{4.12}$$

და პირიქით, ამ გამოსახულებიდან გამომდინარეობს (4.10) და (4.11). ((4.9)-დან და ანალოგიური ფორმულიდან σ_n^--თვის მივიღებთ, რომ $P_s(\beta)=N_s(\beta)=0$.) მაშასადამე, (4.12) არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისთვის, რომ $F(x)$ იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი (α,β) ინტერვალზე. აქედან მივიღებთ:

თეორემა 4.8. *ვთქვათ, $\sum c_\nu e^{i\nu x}$ არის $S[dF]$, სადაც F აკმაყოფილებს (4.6) ტოლობას. პირობები (4.12),(4.10) და (4.11) აუცილებელი და საკმარისია, რომ F ფუნქციის დადებითი და უარყოფითი ვარიაციები შესაბამისად იყვნენ აბსოლუტურად უწყვეტები (α,β) ინტერვალზე.*

ვთქვათ, $F_k(x)$, $0<x<2\pi$, არის თანაბრად შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციათა მიმდევრობა. თუ $F_k(x)$ თითქმის ყველგან კრებადია $F(x)$ ზღვრისკენ, მაშინ $C_n^k \to C_n$, $k\to\infty$, სადაც C_n^k და C_n-ით აღნიშნულია, შესაბამისად F_k და F ფუნქციების ფურიეს n-ური კოეფიციენტები. ცხადია, შებრუნებული არ არის სამართლიანი. თუ, მაგალითად, $I_1, I_2, \dots$ არის ინტერვალთა ისეთი მიმდევრობა, რომ ინტერვალის სიგრძე მიისწრაფვის ნულისკენ და (0,2π)-ის ყოველი წერტილი ეკუთვნის უსასრულო რაოდენობის I_k ინტერვალს, მაშინ $F_k(x)$ მახასიათებელი ფუნქციების მიმდევრობა I_k ინტერვალებზე განშლადია ყოველი x-თვის, მაგრამ $|C_n^k|\le|I_k|/2\pi\to 0$, $k\to\infty$(თანაბრად n-ის მიმართ). ზემოთ მოყვანილი ფაქტის შებრუნებული დებულება სამართლიანია თუ F_k ფუნქციები მონოტონურია.

თეორემა 4.9. *(კარათეოდორის თეორემა) ვთქვათ, $\{F_k(x)\}$, $0<x<2\pi$, არის თანაბრად შემოსაზღვრული ვარიაციის არაკლებად ფუნქციათა მიმდევრობა და ვთქვათ, C_n^k (კომპლექსური) არის F_k ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები. თუ ზღვარი $\lim_{k\to\infty}C_n^k=C_n$ არსებობს ყოველი n-თვის, მაშინ C_n რიცხვები არის შემოსაზღვრული, არაკლებადი $F(x)$ $(0<x<2\pi)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები და $F_k(x)\to F(x)$ ყოველ x წერტილში, სადაც F არის უწყვეტი.*

Proof. ჰელის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $\{F_k\}$-ს ქვემიმდევრობა, რომელიც კრებადია არაკლებადი $F(x)(0 < x < 2\pi)$ ფუნქციისკენ. ცხადია, F-ის ფურიეს კოეფიციენტებია C_n-ები და საჩვენებელი დაგვრჩა მხოლოდ ის, რომ $F_k(\xi) \to F(\xi)$, როცა F უწყვეტია $(0, 2\pi)$ -ის შიგა ξ წერტილში. დავუშვათ, რომ $F_k(\xi)$ არ არის კრებადი $F(\xi)$-კენ. ჩვენ შეგვიძლია მოვძებნოთ $\{F_{k_j}\}$ რომლისთვისაც $\lim F_{k_j}(\xi)$ არსებობს და განსხვავდება $F(\xi)$-გან, ჩავთვალოთ, რომ ის მეტია $F(\xi)$-ზე. არსებობს $\{F_{k_j}\}$ მიმდევრობის ისეთი $\{F_{k'_j}\}$ ქვემიმდევრობა, რომ $\lim F_{k'_j}(x) = G(x)$ არსებობს ყოველ წერტილში. G ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებიც არის C_n-ები, აქედან $F(x) = G(x)$ თითქმის ყველგან. მეორეს მხვრივ,

$$G(\xi) = \lim F_{k'_j}(\xi) = \lim F_{k_j}(\xi) > F(\xi),$$

ვინაიდან $G(x)$ არაკლებადი ფუნქციაა და $F(x)$ უწყვეტია $x = \xi$ წერტილში და სრულდება $G(x) > F(x)$ უტოლობა ξ-ის მარჯვნივ რაიმე ინტერვალზე, ამიტომ არ სრულდება $F(x) = G(x)$ თითქმის ყველგან. ეს წინააღმდეგობა აჩვენებს, რომ $F_k(\xi) \to F(\xi)$. $\square$

თეორემა 4.9 განვაზოგადოთ ფურიე-სტილტიესის მწკრივებისთვის. თუ არ მივუთითებთ დამატებით პირობებს, ქვემოთ განხილული არაკლებადი Φ ფუნქცია განსაზღვრულია ყოველი x-თვის და აკმაყოფილებს პირობას:

$$\Phi(x + 2\pi) - \Phi(x) = \Phi(2\pi) - \Phi(0).$$

თეორემა 4.10. *ვთქვათ, $F_1(x)$, $F_2(x)$, ... არაკლებად ფუნქციათა მიმდევრობაა და ვთქვათ c_n^k არის dF_k-ს ფურიეს კოეფიციენტები. მაშინ*

(i) თუ $\lim\limits_{k\to\infty} c_n^k = c_n$ არსებობს ყოველი n-თვის, მაშინ არსებობს არაკლებადი $F(x)$ ფუნქცია ისეთი, რომ dF-ის ფურიეს კოეფიციენტებია c_n-ები. ამასთან, არსებობს ისეთი B_k მუდმივები, რომ $\{F_k(x) - B_k\}$ კრებადია $F(x)$-კენ F ფუნქციის ყოველ უწყვეტობის წერტილში.

(ii) პირიქით, თუ B_k მუდმივების მიმდევრობისთვის $\{F_k(x) - B_k\}$ მიმდევრობა კრებადია რაიმე არაკლებადი $F(x)$ ფუნქციისკენ F-ის ყოველ უწყვეტობის წერტილში, მაშინ თუ c_nით აღვნიშნავთ dF-ის ფურიეს კოეფიციენტებს, გვაქვს $\lim c_n^k = c_n$ ყოველი n-თვის.

Proof. (i) ვთქვათ B_k არის $S[F_k]$-ს მუდმივი წევრი. $F_k - B_k$ იქნება თანაბრად შემოსაზღვრული, მაშინ არსებობს ქვემიმდევრობა $\{F_{k_J} - B_{k_J}\}$ რომელიც კრებადია რაიმე $F(x)$ ზღვრისკენ ყოველ $0 \le x \le 2\pi$ წერტილში. ვთქვათ, C_n^k არის $F_k - B_k$-ს ფურიეს კოეფიციენტები. მაშინ $C_0^k = 0$ ყოველი k-თვის და ყოველი $n \ne 0$-თვის ნაწილობითი ინტეგრებით მივიღებთ:

$$C_n^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (F_k - B_k) e^{-inx} dx = \frac{c_n^k - c_0^k}{in}. \tag{4.13}$$

აქედან, $\lim C_n^k = C_n$ არსებობს ყოველი n-თვის. თეორემა 4.9-დან , $F_k(x) - B_k$ კრებადია $F(x)$-კენ F ფუნქციის ყოველ უწყვეტობის წერტილში $(0, 2\pi)$ ინტერვალში. საიდანაც, თუ (4.13)-ში გადავალთ $k \to \infty$ ზღვარზე, მივიღებთ $C_n = (c_n - c_0)/in$ როცა $n \ne 0$. მეორეს

მხვრივ, თუ γ_n-ები არის dF-ის ფურიეს კოეფიციენტები, ნაწილობითი ინტეგრებით გვექნება

$$C_n^k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Fe^{-inx}dx = \frac{\gamma_n - \gamma_0}{in},$$

და $c_n - c_0 = \gamma_n - \gamma_0$ როცა $n \neq 0$. ამასთან,

$$2\pi\gamma_0 = F(2\pi) - F(0) = \lim\{F_{k_j}(2\pi) - F_{k_j}(0)\} = \lim 2\pi c_0^{k_j} = 2\pi c_0,$$

რაც ნიშნავს რომ $\gamma_0 = c_0$. აქედან გვაქვს, რომ $c_n = \gamma_n$ ყოველი n-თვის. ახლა $F(x)$ ფუნქცია გავაგრძელოთ (0.2π)-ის გარეთ შემდეგი ფორმულით:

$$F(x+2\pi) - F(x) = F(2\pi) - F(0).$$

ამ და შემდეგი გამოსახულებებიდან

$$F_k(x+2\pi) - F_k(x) = 2\pi c_0^k,\ \ F(x+2\pi) - F(x) = 2\pi c_0, c_0^k \to c_0,$$

გამომდინარეობს, რომ $F_k(x) - B_k$ კრებადია $F(x)$-კენ F ფუნქციის ყოველ უწყვეტობის წერტილში რომელიც განსხვავებულია $0(\mod 2\pi)$-გან. აქედან გამომდინარეობს კრებადობა $0(\mod 2\pi)$-ის კონგრუენტულ წერტილში, თუ უწყვეტია ამ წერტილში.

(ii) $F_k - B_k$-ს მაგივრად ვიგულისხმოთ F_k, რადგან ეს გავლენას არ ახდენს ფურიე-სტილტიესის კოეფიციენტებზე. ვთქვათ, C_n^k, C_n არის F_k და F-ის ფურიეს კოეფიციენტები, განხილული $(0, 2\pi)$ ინტერვალში. ცხადია, $C_n^k \to C_n$. თუ F არის უწყვეტი x წერტილში, მაშინ

$$2\pi c_0^k = F_k(x+2\pi) - F_k(x) \to F(x+2\pi) - F(x) = 2\pi c_0,$$

და ასევე $c_0^k \to c_0$. როცა $n \neq 0$,

$$(c_n^k - c_0^k)/in = C_n^k \to C_n = (c_n - c_0)/in,$$

საიდანაც მივიღებთ $c_n^k \to c_n$. □

თეორემა 4.10 შეგვიძლია გამოვიყენოთ ნამდვილ რიცხვთა

$$x_1, x_2, ..., x_k, ... \tag{4.14}$$

მიმდევრობის $\mod 1$ -ით განაწილების ამოცანებში. მოვაბრუნოთ აბცისათა ღერძი 1-ის ტოლი სიგრძის მქონე Γ წრეწირზე, განვიხილოთ როგორც ამ წრეწირის წერტილები. ვთქვათ, მოცემულია ნახევრად ღია რკალი $\alpha < x \leq \beta$ Γ წრეწირზე, $0 \leq \beta - \alpha \leq 1$, აღვნიშნოთ $\nu_k(\alpha, \beta)$ სიმბოლოთი $x_1, x_2, ..., x_k$-ის წერტილთა რაოდენობა, რომლებიც ჩავარდება განხილულ რკალში. ვიტყვით, რომ $F(x)$ ფუნქცია არის (4.14)-ის განაწილების ფუნქცია, თუ $F(x)$ არის არაკლებადი $(-\infty, +\infty)$-ზე და აკმაყოფილებს პირობა $F(x+1) - F(x) = 1$, და სრულდება პირობა

$$\nu_k(\alpha, \beta)/k \to F(\beta) - F(\alpha)$$

ნებისმიერი (α, β) რკალისთვის, რომლის ბოლოებზეც F არის უწყვეტი. თუ (4.14)-ს აქვს განაწილების ფუნქცია, მისგან მუდმივით განსხვავებული ფუნქციაც იქნება განაწილების ფუნქცია.

თუ $F(x) = x + C$, ვიტყვით, რომ (4.14) არის $\mod 1$-ით ექვიგანაწილებული ან მარტივად, ექვიგანაწილებული.

თეორემა 4.11. *აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისთვის, რომ* (4.14) *მიმდევრობას ჰქონდეს განაწილების ფუნქცია არის ის, რომ ზღვარი*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\{e^{-2\pi inx_1} + e^{-2\pi inx_2} + e^{-2\pi inx_k}\} = c_n \tag{4.15}$$

არსებობდეს ყოველი $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$*-თვის. თუ ეს ზღვრები არსებობენ, მაშინ ისინი იქნება* (4.14)*-ის განაწილების ფუნქციის ფურიე-სტილტიესის კოეფიციენტები* $(0, 1)$*-ის მიმართ.*

Proof. საკმარისობა. ვთქვათ $F_k(x)$ არის $F_k(x) = \nu_k(0, x)/k$, $0 < x \le 1$ ფორმულით განსაზღვრული არაკლებადი ფუნქცია და $F_k(x + 1) - F_k(x) = 1$ ყოველი x-თვის. კერძოდ, $F_k(0) = 0, F_k(1) = 1$. $F_k(x)$ არის საფეხურა ფუნქცია, რომელსაც აქვს ნახტომი ყოველ $x_1, x_2, ..., x_k$ წერტილში და მათ $\mod 1$ კონგრუენტულ წერტილებში. (4.15)-ში ზღვრისქვეშა გამოსახულება არის $c_n^k = \int_0^1 e^{-2\pi inx} dF_k$. თუ $c_n^k \to c_n$ ყოველი n-თვის, მაშინ თეორემა 4.10-დან გამომდინარეობს, რომ c_n-ები არის არაკლებადი F ფუნქციის ფურიე-სტილტიესი კოეფიციენტები, რომელიც აკმაყოფილებს $F(x + 1) - F(x) = 1$ პირობას. (რადგან $c_0^k = 1$ ყოველი k-თვის, ასევე გვექნება $c_0 = 1$). გარდა ამისა, არსებობს ისეთი B_k მუდმივები, რომ $F_k(x) - B_k \to F(x)$, როცა F უწყვეტია x-წერტილში. ეს გამომდინარეობს იქედან, რომ ყოველი (α, β) რკალისთვის, რომლის ბოლო წერტილებშიც F უწყვეტია, გვაქვს

$$\nu_k(\alpha, \beta)/k = F_k(\beta) - F_k(\alpha) \to F(\beta) - F(\alpha).$$

აუცილებლობა. ვთქვათ, (4.14)-ს აქვს განაწილების F ფუნქცია. ვთქვათ, α არის F ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი და ვთქვათ, F_k არის ფუნქცია, რომელიც ზემოთ არის განსაზღვრული. თუ x არის F ის რაიმე უწყვეტობის წერტილი $(\alpha, \alpha+1)$-დან, გამოსახულებას $F_k(x) - F_k(\alpha)$ აქვს ზღვარი. რადგან $F_k(x+1) - F_k(x) = 1$, ეს ზღვარი უნდა არსებობდეს F-ის ყოველ უწყვეტობის წერტილში. თეორემა 4.10-დან გამომდინარეობს, რომ $F_k(x) - F_k(\alpha)$-ს ფურიე-სტილტიესის კოეფიციენტები უნდა მიისწრაფოდენ რაღაც ზღვრისკენ , როცა $k \to \infty$. ეს ამტკიცებს (4.15)-ს რადგან ზღვრის ქვეშა გამოსახულება არის $\int_0^1 e^{-2\pi inx} dF_k(x)$ □

თეორემა 4.12. *აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისთვის, რომ* (4.14) *მიმდევრობა იყოს ექვიგანაწილებული არის ის, რომ* (4.15) *ზღვარი არსებობდეს ყოველი* $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$*-თვის და ყველა იყოს* 0*-ის ტოლი*

Proof. ეს დებულება ადვილად შეიძლება დამტკიცდეს თუ შევნიშნავთ, რომ $x + C$-ს ფურიე-სტილტიესის კოეფიციენტები შეიცავს მუდმივ წევრ 1-ს მხოლოდ და (4.15)-ში ზღვარი c_0 ყოველ-თვის არსებობს და 1-ის ტოლია. □

თეორემა 4.12-ის შედეგი არის ის, რომ რაიმე ირაციონალური x-თვის მიმდევრობა $x, 2x, 3x, ...$ არის ექვიგანაწილებული. თუ $x_s = sx$ და $n \neq 0$, (4.15)-ში ზღვრის ნიშნის ქვეშა გამოსახულება არის

$$k^{-1}\left|\sum_{s=1}^{k} e^{-2\pi isnx}\right| \leq 2k^{-1}|1-e^{-2\pi inx}|^{-1} = o(1).$$

ანალოგიურად, ჩვენ ვაჩვენებთ ფაქტს, რომ, თუ x ირაციონალურია, მიმდევრობა $x, 3x, 5x, ...$ არის ექვიგანაწილებული.

თეორემა 4.13. *ვთქვათ, $m_1, m_2, ...$ განსხვავებული დადებითი მთელი რიცხვების მიმდევრობა, ხოლო $\alpha_1, \alpha_2, ...$ ნამდვილი რიცხვების მიმდევრობაა. მაშინ თითქმის ყველა x-თვის მიმდევრობა $m_s(x-\alpha_s)$ ექვიგანაწილებულია.*

Proof. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თითქმის ყველა x-თვის ჩვენ გვაქვს

$$\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} e^{2\pi i m_s n(x-\alpha_s)} = o(1) \quad (k\to\infty;\ n=\pm1,\pm2,...),$$

და ამ გამოსახულების სამართლიანობა გამომდინარეობს თუ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ ყოველი

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m_s n(x-\alpha_s)}}{s} \quad (n=\pm1,\pm2,...)$$

სახის მწკვრივი კრებადია თითქმის ყველგან. ეს უკანასკნელი კი არის შემდეგი ლემის შედეგი: □

ლემა 4.14. *ვთქვათ, $\phi_1(x), \phi_2(x), ...$ არის ორთონორმალური და თანაბრად შემოსაზღვრული სისტემა (a,b)-ში. მაშინ მწკვრივი*

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\phi_s(x)}{s} \tag{4.16}$$

კრებადია თითქმის ყველგან (a,b)-ში.

Proof. ვთქვათ, s_N არის (4.16)-ის კერძო ჯამი და $f(x)$ არის ისეთი ფუნქცია, რომ $||f-s_N||_2 \to 0$.

$N = k^2$-თვის გვაქვს

$$\int_a^b |f-s_N|^2 = \sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{s^2} < \frac{1}{N} = \frac{1}{k^2}.$$

მაშასადამე, მწკვრივი $\sum\int_a^b |f-s_{k^2}|dx$ კრებადია, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $s_{k^2}\to f$ თითქმის ყველგან. □

ვთქვათ, $\mathcal{F}$ არის $F(x)$, $\alpha \leq x \leq \beta$, ფუნქციათა ოჯახი, რომელთაც აქვს თვისება: ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის, არსებობს $\delta > 0$ რიცხვი, რომ

$$\left|\sum[F(b_k) - F(a_k)]\right| < \varepsilon \tag{5.1}$$

ყოველი $F \in \mathcal{F}$ და (α, β)-ს არაგადამფარავი, სასრული რაოდენობის (a_k, b_k) ინტერვალებისთვის, რომლისთვისაც $\sum(b_k - a_k) < \delta$. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $F \in \mathcal{F}$ ფუნქციები არიან თანაბრად აბსოლურურად უწყვეტები (α, β)-ში. ცხადია, $\mathcal{F}$ კლასის ფუნქციების ყველგანკრებადი მიმდევრობის ზღვარი არის აბსოლუტურად უწყვეტი.

ვთქვათ, $\phi(u)$ არაუარყოფითი და არაკლებადია $u \geq 0$-თვის და $\phi(u)/u \to \infty$ როცა $u \to \infty$. ვთქვათ, $\mathcal{H}$ არის $(0, 2\pi)$-ზე განსაზღვრულ ფუნქციათა ოჯახი, რომელთათვისაც

$$\int_0^{2\pi} \phi(|f(x)|)dx \leq C,$$

სადაც C დამოუკიდებელია f-გან. მაშინ $f \in \mathcal{H}$-ის F ინტეგრალები გვაძლევს თანაბრად აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა ოჯახს.

ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ (5.1) ჯამები, იგივე რაც $\int_S f dx$ ინტეგრალები არიან თანაბრად მცირეები $|S|$-ის მიმართ. ვთქვათ, რაიმე $M > 0$ მოცემულია და u_0 არის ისეთი რიცხვი, რომ $\phi(u)/u \geq M$, როცა $u \geq u_0$. ჩავსვათ $|f| = f_1 + f_2$, სადაც $f_1 = |f|$ თუ $|f| \leq u_0$ და $f_1 = 0$ სხვაგან. შევნიშნოთ, რომ f_2 არის ან 0 ან u_0-ზე მცირე რაიმე რიცხვი. მაშინ

$$\left|\int_S f dx\right| \leq \int_S f_1 dx + \int_S f_2 dx \leq u_0|S| + M^{-1}\int_S \phi(f_2)dx \leq u_0|S| + CM^{-1}.$$

უკანასკნელი ჯამი არის საკმარისად მცირე თუ M-ს ავიღებთ საკმარისად დიდს და თუ დავაფიქსირებთ, შემდეგ $|S|$-ს ავიღებთ მცირეს.

თეორემა 5.1. *აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) = \sum_0^\infty A_n(x) \tag{5.2}$$

ეკუთვნოდეს L-ს არის ის, რომ ფუნქციები

$$F_n(x) = \int_0^x \sigma_n(t)dt \quad (n = 1, 2, ...) \tag{5.3}$$

იყვნენ თანაბრად აბსოლუტურად უწყვეტები $(0, 2\pi)$ ინტერვალში.

Proof. თუ F_n-ები არიან თანაბრად აბსოლუტურად უწყვეტები, მაშინ არიან თანაბრად შემოსაზღვრული ვარიაციის ფუნქციები, $||\sigma_n||_1 = O(1)$ და $\sum A_n(x)$ არის $S[dF]$. რადგან F არის F_n (5.3) მიმდევრობის რაიმე ყველგანკრებადი ქვემიმდევრობის ზღვარი, F არის აბსოლუტურად უწყვეტი და $S[dF] = S[f]$, სადაც $f = F'$.

პირიქით, დავუშვათ, რომ $\sum A_n(x)$ არის $S[f]$. სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ $a_0 = 0$. მაშინ F_n ფუნქციები, რომლებიც მეცემულია (5.3)-ში, n-ზე დამოკიდებული მუდმივით განსხვავდება f ფუნქციის F ინტეგრალის ფურიეს მწკვრივის $(C, 1)$- საშუალოებისგან. მაშასადამე,

$$\left|\sum(F_n(b_k) - F_n(a_k))\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum(F(b_k+t) - F(a_k+t))K_n(t)dt\right| \leq \max_t\left|\sum[F(b_k+t) - F(a_k+t)]\right|,$$

რომელიც არის უსასრულოდ მცირე S-ის მიმართ. თეორემა 5.1 დამტკიცებულია □

ცხადია, $\sum A_n(x)$ ეკუთვნის A კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა σ_n-ები თანაბრად აბსოლუტურად უწყვეტებია.

თეორემა 5.2. *(i) იმისთვის, რომ $\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს L კლასს აუცილებელი და სამარისია, რომ $||\sigma_m - \sigma_n||_1 \to 0$ როცა $m, n \to \infty$.*

(ii) თუ $\sum A_n(x)$ არის $S[f]$, მაშინ $||\sigma_n - f||_1 \to 0$

Proof. დავუშვათ, რომ $\sum A_n(x)$ არის $S[f]$. შემდეგი უტოლობა

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|K_n(t)dt \tag{5.4}$$

ვაინტეგროთ $0 \leq x \leq 2\pi$-ზე, მივიღებთ

$$||\sigma_n - f||_1 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\eta(t)K_n(t)dt,$$

სადაც $\eta(t) = \int_0^{2\pi}|f(x+t) - f(x)|dx$. იქედან, რომ $\eta(t)$ უწყვეტია და ნულის ტოლია როცა $t = 0$ და უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა მხარე არის $S[\eta]$-ს $(C, 1)$ საშუალო $t = 0$ წერტილში, მივიღებთ: $||\sigma_n - f||_1 \to 0$. ეს ამტკიცებს (ii)-ს და აგრეთვე აუცილებლობას (i)-ში, რადგან

$$||\sigma_m - \sigma_n||_1 \leq ||\sigma_m - f||_1 + ||\sigma_n - f||_1 \to 0, \quad m, n \to \infty.$$

პირიქით, თუ $||\sigma_m - \sigma_n||_1 \to 0$, მაშინ არსებობს ისეთი $f \in L$ ფუნქცია, რომ $||\sigma_n - f||_1 \to 0$.

როცა $n > |k|$,

$$2\pi\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)c_k = \int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n e^{-ikt}dt = \int_{-\pi}^{\pi}fe^{-ikt}dt + \int_{-\pi}^{\pi}(\sigma_n - f)e^{-ikt}dt.$$

გადავიდეთ $n \to \infty$ ზღვარზე და შევნიშნოთ, რომ უკანასკნელი წევრის აბსოლუტური მნიშვნელობა არ გადააჭარბებს $||\sigma_n - f||_1$-ს, საიდანაც მივიღებთ, რომ c_k არის f ფუნქციის k-ური კოეფიციენტი. ეს ამტკიცებს თეორემა 5.2-ს. □

თეორემა 5.3. *ვთქვათ, $\phi(u)$, $u \geq 0$ ისეთი ამოზნექილი, არაუარყოფითი, არაკლებადი ფუნქციაა, რომ $\phi(u)/u \to \infty$, როცა $u \to \infty$. იმისთვის, რომ $\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს L_ϕ-ს აუცილებელი და საკმარისია, რომ*

$$\int_0^{2\pi}\phi(|\sigma_n(x)|)dx \leq C, \tag{5.5}$$

სადაც C სასრულია და დამოუკიდებელია n-გან.

Proof. პირობის აუცილებლობის დასამტკიცებლად განვიხილოთ

$$|\sigma_n(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x-t)|f(t)|dt \tag{5.6}$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $p(t) = K_n(x-t)$-ს ინტეგრალი $(0, 2\pi)$ ინტერვალზე არის π, იენსენის უტოლობის ძალით მივიღებთ:

$$\phi(|\sigma_n(x)|) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x-t)\phi(|f(t)|)dt. \tag{5.7}$$

თუ ვაინტეგრებთ x-ის მიმართ და მარჯვენა მხარეში შევცვლით ინტეგრების რიგს გვექნება

$$\int_0^{2\pi} \phi(|\sigma_n(x)|)dx \leq \int_0^{2\pi} \phi(|f|)dt, \tag{5.8}$$

რაც ამტკიცებს პირობის აუცილებლობას. საკმარისობის საჩვენებლად, იენსენის უტოლობიდან

$$\phi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sigma_n|dx\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(|\sigma_n|)dx \leq \frac{C}{2\pi}$$

გამომდინარეობს, რომ $||\sigma_n||_1 = O(1)$, ამიტომ $\sum A_n(x)$ არის $S[dF]$. უფრო მეტიც, (5.3) ფუნქციები თანაბრად აბსოლუტურად უწყვეტებია. აქედან გამომდინარეობს, რომ F აბსოლუტურად უწყვეტია და $\sum A_n(x)$ არის $S[f]$, $f = F'$. რადგან $\sigma_n(x) \to f(x)$ თითქმის ყველგან, (5.5)-დან გამომდინარეობს $||\phi(|f|)||_1 \leq C$, ეს ნიშნავს, რომ $f \in L_\phi$. □

კერძოდ, იმისათვის, რომ (5.2) ეკუთვნოდეს L^r,$(r > 1)$-ს აუცილებელი და საკმარისია, რომ $||\sigma_n||_r = O(1)$. როგორც თეორემა 4.2 გვიჩვენებს , შედეგი არ არის სამართლიანი $r = 1$-თვის.

თეორემა 5.4. *ვთქვათ, $\phi(u)$, $u \geq 0$ ამოზნექილი, არაუარყოფითი, არაკლებადი ფუნქციაა. თუ $f \in L_\phi$, მაშინ*

$$\int_0^{2\pi} \phi(|\sigma_n|)dx \to \int_0^{2\pi} \phi(|f|)dx.$$

თუ $f \in L^r$, $r \geq 1$, მაშინ $||\sigma_n||_r \to ||f||_r$.

Proof. (5.8)-ის გათვალისწინებით საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\liminf \int_0^{2\pi} \phi(|\sigma_n|)dx \geq \int_0^{2\pi} \phi(|f|)dx$. ვთქვათ, E არის რაიმე წერტილთა სიმრავლე, სადაც σ_n-ები არიან თანაბრად შემოსაზღვრულები. რადგან $\sigma_n \to f$ თითქმის ყველგან, გვაქვს $\int_E \phi(|\sigma_n|)dx \to \int_E \phi(|f|)dx$ და აქედან

$$\liminf \int_0^{2\pi} \phi(|\sigma_n|)dx \geq \int_E \phi(|f|)dx.$$

რადგან $|E|$ შეიძლება ნებისმიერად მიუახლოვდეს 2π-ს, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა მხარე შეიძლება ნებისმიერად მიუახლოვდეს $\int_0^{2\pi} \phi(|f|)dx$-ს. ეს ამტკიცებს თეორემა 5.4-ს. □

დავუშვათ, რომ ამოზნექილი და არაუარყოფითი $\phi(u)$, $u \geq 0$ ფუნქციითვის $\phi(0) = 0$ და ეს ფუნქცია არაკლებადია. დავუშვათ, რომ $\sum A_n(x)$ ეკუთვნის L_ϕ, გვაინტერესებს რაშემთხვევაში სრულდება:

$$\int_0^{2\pi} \phi(|\sigma_n - f|)dx \to 0. \tag{5.9}$$

თუ (5.4)-ში გამოვიყენებთ იენსენის უტოლობას, დავინახავთ, რომ (5.9)-ის შესრულებისთვის $\eta(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\phi\left\{|f(x+t)-f(x)|\right\}dx$ უნდა იყოს ინტეგრებადი და ის უნდა მიისწრაფოდეს ნულისკენ, როცა $t\to 0$. ეს არ არის ყოველთვის სამართლიანი, თუ $\phi(u)$ სწრაფად იზრდება u-ს მიმართ. მაგრამ სიტუაცია შეიძლება გამოვასწოროთ (5.9)-ში ϕ-ს არგუმენტისთვის კოეფიციენტის დამატებით: თუ $f\in L_\phi$, მაშინ

$$\eta^*(t)=\int_{-\pi}^{\pi}\phi\left\{\frac{1}{4}|f(x+t)-f(x)|\right\}dx$$

ინტეგრებადია და ნულისკენ კრებადია t-ს მიმართ.

მართლაც, ვთქვათ $f=g+h$, სადაც g არის შემოსაზღვრული და

$$\int_{-\pi}^{\pi}\phi(|h|)dx<\varepsilon.$$

იენსენის უტოლობით,

$$\int_0^{2\pi}\phi\left\{\frac{1}{4}|f(x+t)-f(x)|\right\}dx\le\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\phi\left\{\frac{1}{2}|g(x+t)-g(x)|\right\}dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\phi\left\{\frac{1}{2}|h(x+t)-h(x)|\right\}dx,$$

სადაც ბოლო შესაკრები არ გადააჭარბებს $\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\phi\left\{|h(x+t)|\right\}dx+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\phi\left\{|h(x)|\right\}dx\le\frac{1}{2}\varepsilon$-ს, ხოლო წინა წევრი შემოსაზღვრულია და ნულისკენ კრებადია t-ს მიმართ. (ϕ-ს შესახებ ჩვენი ჰიპოთეზიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველ $0\le u\le a$ ინტერვალში გვაქვს $\phi(u)\le Mu$, სადაც $M=\phi(a)/a$.) აქედან გამომდინარეობს რომ მთლიანად მარჯვენა მხარე ნაკლებია ε-ზე, როცა $|t|$ არის მცირე, რაც ამტკიცებს ზემოთ მოყვანილ ფაქტს. ამრიგად, მივიღეთ შემდეგი:

თეორემა 5.5. *დავუშვათ, რომ $\phi(u)$, $u\ge 0$ არის ამოზნექილი, არაუარყოფითი და არაკლებადი ფუნქცია და $\phi(0)=0$. თუ $\sum A_n(x)$ არის $S[f]$, $f\in L_\phi$, მაშინ*

$$\int_0^{2\pi}\phi(\frac{1}{4}|f-\sigma_n|)dx\to 0.$$

კერძოდ, თუ $f\in L^r$, მაშინ $||f-\sigma_n||_r\to 0$.

თეორემა 5.6. *დავუშვათ, რომ $\sum A_n(x)$ არის $S[dF]$, სადაც ყოველი x-თვის $F(x)=\frac{1}{2}\{F(x+0)+F(x-0)\}$*

(i) შემდეგი ორი პირობიდან თითოეული არის აუცილებელი სა საკმარისი პირობა იმისთვის, რომ F იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი ჩაკეტილ (α,β) ინტერვალზე:

(a) $F_n(x)=\int_\alpha^x\sigma_n dt$ ფუნქციები არიან თანაბრად აბსოლუტურად უწყვეტები (α,β)-ზე;

(b) $||\sigma_m-\sigma_n;\alpha,\beta||_1\to 0$.

(ii) თუ $\sigma_n(t)$ ფუნქციებს (a)-სა და (b)-ში შევცვლით $\sigma_n^+(t)$, ჩვენ მივიღებთ აუცილებელ და საკმარის პირობებს (ვუწოდოთ (a'), (b')) F ფუნქციის დადებითი ვარიაციის აბსოლუტურად უწყვეტობისთვის (α,β)-ში.

Proof. ადვილი საჩვენებელია, რომ (b)-დან გამომდინარეობს (a), ამიტომ (i)-ის დამტკიცებისთვის საკმარისია ვაჩვენოთ (a)-ს საკმარისობა და (b)-ს აუცილეობლობა. პირველი გამომდინარეობს თეორემა 4.2-ის დამტკიცებიდან.

დავუშვათ, რომ $\sum A_n(x)$ არის $S[dF]$ და F არის აბსოლუტურად უწყვეტი $\alpha \le x \le \beta$ ინტერვალში. თუ ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ $||\sigma_m - \sigma_n; \alpha', \beta'||_1 \to 0$, (α, β)-ს შიგნით მდებარე რაიმე (α', β') ინტერვალში, მაშინ აქედან გამომდინარეობს (b)-ს აუცილებლობა. (4.7)-დან გვაქვს, რომ $||\sigma_\nu; \alpha, \alpha'||_1$ და $||\sigma_\nu; \beta', \beta||_1$ კრებადია შესაბამისად (α, α') და (β', β) ინტერვალებზე F-ის ვარიაციისკენ და ისინი ნულისკენ მიდიან $\alpha' - \alpha,\ \beta - \beta'$-ის მიმართ. იგივე სრულდება $|\sigma_m - \sigma_n|$ ინტეგრალებისთვის (α, α') და (β', β) ინტერვალებზე.

ვთქვათ, $f(x) = F'(x)$. იმისთვის, რომ ვაჩვენოთ $||\sigma_m - \sigma_n; \alpha', \beta'||_1 \to 0$ საკმარისია $||\sigma_m - f; \alpha', \beta'||_1 \to 0$ ჩვენება. დავაკვირდეთ შემდეგ გამოსახულებას.

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_m(x-t)dF(t) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta + \frac{1}{\pi}\int_\beta^{\alpha+2\pi} = v_m + w_m. \tag{5.10}$$

$x \in (\alpha', \beta')$ და $t \in (\beta, \alpha + 2\pi)$-თვის w_m-ის ინტეგრანდი თანაბრად კრებადია ნულისკენ, ამიტომ $||w_m; \alpha', \beta'||_1 \to 0$. რადგან $v_m = \sigma_m(x; f^*)$, სადაც $f = f^*$ (α, β)-ში, $f^* = 0$ სხვაგან, მივიღებთ $||v_m - f^*; 0, 2\pi||_1 \to 0$ და ასევე $||v_m - f; \alpha', \beta'||_1 \to 0$. აქედან

$$||\sigma_m - f; \alpha', \beta'||_1 \le ||v_m - f; \alpha', \beta'||_1 + ||w_m; \alpha', \beta'||_1 \to 0,$$

ეს ამტკიცებს (i)-ს.

ანალოგიურად, (ii)-ს დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ (a')-ის საკმარისობა და (b')-ის აუცილებლობა. თუ $F_n^*(x) = \int_\alpha^x \sigma_n^+ dt$ ფუნქციები თანაბრად აბსოლუტურად უწყვეტებია (α, β) ინტერვალზე, მათი ზღვარი, რომელიც წარმოადგენს F-ის ვარიაციას (a, x)-ზე((4.7)-დან) არის აბსოლუტურად უწყვეტი ამ ინტერვალზე.

(b')-ის აუცილებლობის დასამტკიცებლად, დასაწყისისთვის განვიხილოთ $(\alpha, \beta) = (0, 2\pi)$ შემთხვევა. ვთქვათ, $V(x),\ P(x)$ და $N(x)$ არის F ფუნქციის შესაბამისად სრული, დადებითი და უარყოფითი ვარიაციები (a, x)-ზე. მაშინ

$$\sigma_n = \sigma_n' - \sigma"_n, \quad \sigma_n' = \sigma_n[dP] \ge 0,\ \sigma"_n = \sigma_n[dN] \ge 0. \tag{5.11}$$

მიმართებებიდან $P' + N' = V' = |F'|,\ P' - N' = F'$ (ცნობილია რომ ისინი სამართლიანია თითქმის ყველგან), გამომდინარეობს $P' = F'^{+},\ N' = F'^{-}$ თითქმის ყველგან.

უტოლობებიდან $\sigma_n \le \sigma_n',\ \sigma_n' \ge 0$ გამომდინარეობს $0 \le \sigma_n^+ \le \sigma_n'$. თუ ჩვენ განვსაზღვრავთ $\theta_n(x)$ ფუნქციას

$$\sigma_n^+(x) = \theta_n(x)\sigma_n'(x)$$

ფორმულით $\sigma_n' \ne 0$ წერტილებში და $\theta_n(x) = 1$ სხვაგან, მაშინ $0 \le \theta_n(x) \le 1$ ყოველი x-სა და n-თვის. შევნიშნოთ, რომ თითქმის ყველგან $\sigma_n \to F'$ (III თავი, (8.1)), და აგრეთვე $\sigma_n^+ \to F'^{+}$.

იგივე ფაქტის გამოყენებით მივიღებთ $\sigma_n' \to P' = F'^{+}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\theta_n(x)$ კრებადია 1-კენ თითქმის ყველა წერტილში, სადაც $p(x) = P'(x) \neq 0$.

თავიდან ჩავთვალოთ, რომ $P(x)$ არის აბსოლუტურად უწყვეტი. ვაჩვენოთ, რომ $||\sigma_n^+ - p; 0, 2\pi||_1 \to 0$. მართლაც,

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n^+ - p|dx = \int_0^{2\pi} |\sigma_n'\theta_n - p|dx \leq \int_0^{2\pi} |\sigma_n' - p|\theta_n dx + \int_0^{2\pi} |\theta_n - 1|pdx.$$

მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები მაჟორირდება $||\sigma_n' - p||_1 \to 0$. ასევე მეორე ინტეგრალიც მარჯვენა მხარეში კრებადია ნულისკენ, რადგან ინტეგრანდი $|\theta_n(x) - 1|p(x)$ მაჟორირდება $p(x) \in L$-ით და ნულისკენ კრებადია თითქმის ყველგან. მაშასადამე,

$$||\sigma_n^+ - p||_1 \to 0, \quad ||\sigma_m^+ - \sigma_n^+||_1 \leq ||\sigma_m^+ - p||_1 + ||\sigma_n^+ - p||_1 \to 0,$$

და (b') პირობის აუცილებლობა ამით დამტკიცებულია, როცა $(\alpha, \beta) = (0, 2\pi)$.

იმისთვის, რომ აღარ გვქონდეს ეს შეზღუდვა, გავაკეთოთ ისე, როგორც (b)-ში. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $||\sigma_m^+ - p; \alpha', \beta'||_1 \to 0$ რაიმე (α', β') ინტერვალისთვის (α, β)-ს შიგნით. სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ (α, β) შედის $(0, 2\pi)$ ინტერვალში და დავუბრუნდეთ (5.10)-ს. v_m წევრი აქ არის $\sigma_m(x; dF^*)$, სადაც F^* ტოლია F-ის (α, β) ინტერვალში, $F(\alpha)$-ს ტოლია $(0, \alpha)$-ში და $F(\beta)$-ს ტოლია $(\beta, 2\pi)$ ინტერვალში. F^*-ის დადებითი ვარიაცია P^* არის აბსოლუტურად უწყვეტი, ასევე თუ $p^* = P^{*'}$, მაშინ $||v_m^+ - p; \alpha', \beta'||_1 \leq ||v_m^+ - p^*; 0, 2\pi||_1 \to 0$. რადგან v_m თანაბრად მიისწრაფვის ნულისკენ (α', β') ინტერვალზე, მივიღებთ $||\sigma_m^+ - p; \alpha', \beta'||_1 \to 0$.

(b) პირობა სრულდება, თუ არსებობს არაუარყოფითი, არაკლებადი, ამოზნექილი ისეთი ფუნქცია $\phi(u)$, $u \geq 0$, რომ $\phi(u)/u \to 0$ და $||\phi(|\sigma_n|); \alpha, \beta||_1 = O(1)$. ანალოგიურად, (b') სრულდება თუ $||\phi(|\sigma_n^+|); \alpha, \beta||_1 = O(1)$. □

ამ თეორემიდან სხვადასხვა შედეგები მიიღება. ზოგიერთი უტოლობა (C, α) , $0 < \alpha < 1$ გულისთვის შეიძლება გავხადოთ უფრო ზუსტი. ვთქვათ,

$$\lambda_n = \lambda_n^\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |K_n^\alpha(t)|dt, \quad \lambda = \sup_n \lambda_n \quad (\alpha > 0).$$

შემდეგი შედეგების დამტკიცება $0 < \alpha < 1$-თვის არის ზუსტად იგივე რაც $\alpha = 1$-თვის.

თეორემა 5.7. *ვთქვათ, ϕ აკმაყოფილებს იგივე პირობებს რასაც თეორემა 5.3-ში. თუ $||\phi(|\sigma_n^\alpha|)||_1 = O(1)$, მაშინ (5.2) ეკუთვნის L_ϕ კლასს. თუ (5.2) არის რაიმე $S[f]$, $f \in L_\phi$, მაშინ $||\phi(|\sigma_n^\alpha|/\lambda)||_1 = O(1)$.*

უფრო მეტიც, თუ $\phi(0) = 0$, მაშინ $||\phi(|f - \sigma_n^\alpha|/4\lambda)||_1 \to 0$, როცა $n \to \infty$.

თეორემა 5.8. *იმისთვის, რომ (5.2) ეკუთვნოდეს S კლასს აუცილებელი და საკმარისია, რომ $||\sigma_n^\alpha||_1 = O(1)$.*

იმისთვის, რომ (5.2) ეკუთვნოდეს L კლასს აუცილებელი და საკმარისია, რომ $||\sigma_m^\alpha - \sigma_n^\alpha||_1 \to 0$, როცა $m, n \to \infty$.

თუ σ_n-ს შევცვლით s_n კერძო ჯამით ამ თავისა და შემდეგი თავის თეორემებში პირობები ისევ აღმოჩნდება საკმარისი, მაგრამ აღარ გვექნება აუცილებლობა. საკმარისობის დამტკიცება შეიძლება იგივე მეთოდებით, გარდა ერთი წერტილისა; ჩვენ არ შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფაქტი: $s_n(x,f) \to f(x)$ თითქმის ყველგან, რადგან ის არის მცდარი. (ეს დამტკიცებულია VII თავის მე-3 პარაგრაფში), მაგრამ ამის მაგივრად შეგვიძლია გამოვიყენოდ ის, რომ ქვემიმდევრობა $\{s_{n_k}(x,f)\}$ თითქმის ყველგან კრებადია $f(x)$-კენ.(ეს დამტკიცებულია VII თავის მე-6 პარაგრაფში.) სხვა დაკვირვება ამ პირობების საკმარისობებზე არის ძალიან გამოყენებადი. σ_n ან s_n-ის თვისებებით შეგვიძლია დავადგინოთ, რომ ისინი ეკუთვნიან გარკვეულ კლასს და არ არის აუცილებელი განვიხილოთ ყველა დადებითი n. საკმარისია დავუშვათ, რომ პირობები სრულდება რაიმე უსასრულობისკენ კრებადი n_k მიმდევრობისთვის. მაშასადამე, თუ $\{\sigma_{n_k}\}$ ან $\{s_{n_k}\}$ თანაბრად კრებადია, მწკვრივები ეკუთვნიან C კლასს (იხილე თეორემა 4.1); თუ $||s_{n_k}||_1 = O(1)$, მაშინ ის არის $S[dF]$ (იხილე თეორემა 4.2); თუ $\{s_{n_k}\}$-ები არიან არაუარყოფითები, მაშინ მწკვრივი არის $S[dF]$ არაკლებადი F-ით (იხილე თეორემა 4.5), და ა. შ.

ეს საშუალებას გვაძლევს ზემოთ მოყვანილი თეორემები ჩამოვაყალიბოთ განსხვავებული ფორმით. მაგალითად, აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისთვის, რომ $\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს C კლასს არის ის, რომ $\sigma_n(x)$-ები იყვნენ თანაბრად უწყვეტები. აუცილებლობა გამომდინარეობს (5.6) უტოლობიდან. გამოვიყენებთ უტოლობა

$$w(\delta;\sigma_n) \le w(\delta;f).$$

პირიქით, თუ $\sigma_n(x)$-ები იყვნენ თანაბრად უწყვეტებია , არცელას ცნობილი თეორემით, ქვემიმდევრობა $\{\sigma_{n_k}\}$ თანაბრად კრებადია უწყვეტი f ფუნქციისკენ და $\sum A_n(x)$ არის $S[f],\ f \in C$.

თეორემა 5.9. *თუ $||s_{n_k}||_1 = O(1)$ $\sum A_n(x)$-ს კერძო ჯამების მიმდევრობისთვის (კერძოდ, როცა s_{n_k}-ები არაუარყოფითებია), მწკვრივი არის $S[dF]$ უწყვეტი F-ით*

Proof. ჩვენ უკვე ვიცით, რომ $\sum A_n(x)$ არის $S[dF]$ და დასამტკიცებელი გვაქვს მხოლოდ F-ის უწყვეტობა. დავუშვათ, რომ $F(x_0+0) - F(x_0-0) = d \neq 0$ რაიმე x_0-თვის და სიმარტივისთვის ვიგულისხმოთ, რომ $x_0 = 0$ და $2F(0) = F(+0) + F(-0)$. ვთქვათ $\phi(x) \sim \sum v^{-1} \sin vx$ (იხილე I თავი, (4.12)). შეგვიძლია დავწეროთ

$$F(x) = \{F(x) - (d/\pi)\phi(x)\} + (d/\pi)\phi(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

სადაც F_1 არის უწყვეტი 0-ში. შესაბამისად,

$$S[dF] = S[dF_1] + S[dF_2], \quad s_n = s_n^1 + s_n^2.$$

რადგან $\phi(0) = \phi(2\pi)$, გვაქვს $S[dF_2] = S'[F_2]$ და $(d/\pi)[D_n(x) - 1/2]$ არის $S[dF_2]$-ის n-ური კერძო ჯამი. ამრიგად, როდესაც $\varepsilon > 0$, $||s_n^2; -\varepsilon, \varepsilon||_1 \approx C \log n$, სადაც C არის დადებითი მუდმივი(II თავი, (12.2)). თუ ჩვენ შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მცირე ε-თვის საკმარისია და

$n > n_0$ სრულდება $||s_n^1; -\varepsilon, \varepsilon||_1 < \frac{1}{2}C \log n$, მაშინ აქედან გამომდინარეობს $||s_n; -\varepsilon, \varepsilon||_1$ და ასევე $||s_n||_1$ კრებადია უსასრულობისკენ, რაც ეწინააღმდეგება პირობას.

ვთქვათ, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $I' = (-2\varepsilon.2\varepsilon)$. თუ $x \in I$, მაშინ

$$|s_n^1(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) DF_1(t) \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{I'} |D_n(x-t)||DF_1(t)| + O(1),$$

$D_n(u)$ არის თანაბრად შემოსაზღვრული $\varepsilon \leq |u| \leq \pi$-ში. მისი I-ზე ინტეგრებით და L_n-ით ლებეგის მუდმივის აღნიშვნით მივიღებთ:

$$\int_I |s_n^1(x)| dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{I'} |dF(t)| \int_I |D_n(x-t)| dx \leq L_n \int_{I'} |dF(t)|.$$

რადგან $L_n = O(\log n)$, და F_1-ის ვარიაცია I-ზე არის მცირე ε-ის მიმართ, F_1-ის 0-ში უწყვეტობიდან გვაქვს: $||s_n^1; -\varepsilon, \varepsilon||_1 < \frac{1}{2}C \log n$ საკმარისად მცირე ε-თვისა და $n > n_o$-თვის. თეორემა 5.9 დამტკიცებულია. □

6. ფუნქციათა კლასები და ფურიეს მწკვრივების აბელის საშუალოები

ვთქვათ,

$$f(\rho, x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rho^n \quad (0 \leq \rho < 1) \tag{6.1}$$

არის ჰარმონიული ფუნქცია ასოცირებული მწკვრივთან

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x). \tag{6.2}$$

წინა ორ თავში მოცემული თეორემების ანალოგიები აბელის საშუალოებისთვის ჩამოყალიბდება შემდეგნაირად.

თეორემა 6.1. *$\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს C კლასს ნიშნავს, რომ*

$$f(\rho, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho \cos(x-t) + t^2} f(t) dt \quad (0 \leq \rho < 1) \tag{6.3}$$

და f უწყვეტია.

აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს C კლასს არის ის, რომ $f(\rho, x)$ იყოს თანაბრად კრებადი, როცა $\rho \to 1$. აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს B კლასს არის ის, რომ $f(\rho, x)$ იყოს შემოსაზღვრული $(0 \leq \rho \leq 1)$-თვის.

თეორემა 6.2. *$\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს S კლასს ნიშნავს, რომ*

$$f(\rho, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho \cos(x-t) + t^2} dF(t) \quad (0 \leq \rho < 1) \tag{6.4}$$

და F არის სასრული ვარიაციის ფუნქცია.

აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს S კლასს არის ის, რომ ინტეგრალი

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho,x)|dx = ||f(\rho,x)||_1 \tag{6.5}$$

იყოს შემოსაზღვრული როცა $\rho \to 1$. ბოლო პირობა ექვივალენტურია $||f^+(\rho,x)||_1 = O(1)$ პირობის. თუ სრულდება (6.4), მაშინ

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho,x)|dx \le \int_0^{2\pi} |dF(x)|.$$

თეორემა 6.3. *აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ $f(\rho,x)$ იყოს წარმოდგენადი (6.4) სახით, სადაც $F(t)$ არაკლებადია, არის ის, რომ $f(\rho,x) \ge 0$ $(0 \le \rho < 1)$-თვის.*

თეორემა 6.4. *თუ $f(\rho,x)$ მოცემულია (6.4) ფორმულით და თუ*

$$F(x) = \frac{1}{2}\{F(x+0) + F(x-0)\}, \tag{6.6}$$

მაშინ

$$\int_\alpha^\beta |f(\rho,x)|dx \to V, \quad \int_\alpha^\beta |f^+(\rho,x)|dx \to P, \quad \int_\alpha^\beta |f^-(\rho,x)|dx \to N,$$

სადაც V, P, N არის შესაბამისად სრული, დადებითი და უარყოფითი ვარიაციები F ფუნქციისა (α,β) ინტერვალზე.

აქედან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა:

თეორემა 6.5. *ვთქვათ, $F(\rho,x)$ არის პუასონის ინტეგრალი პერიოდული F ფუნქციისა, რომელიც არის სასრული ვარიაციის და აკმაყოფილებს (6.6) პირობას. მაშინ სრული (დადებითი, უარყოფითი) ვარიაცია $F(\rho,x)$ ფუნქციისა $\alpha \le x \le \beta$ რკალზე კრებადია $\alpha \le x \le \beta$ ინტერვალზე F ფუნქციის სრული (დადებითი, უარყოფითი) ვარიაციისკენ, როცა $\rho \to 1$.*

თეორემა 6.6. *შემდეგი ორი პირობიდან თითოეული არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისთვის, რომ $\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს L კლასს (ეს ნიშნავს, რომ (6.3)-თვის $f \in L$):*

(i) $\int_0^x f(\rho,u)du$ არის x-ის თანაბრად აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა ოჯახი $0 \le \rho < 1$-თვის.

(ii) $\int_0^{2\pi} |f(\rho,x) - f(\rho',x)|dx \to 0$ როცა $\rho,\rho' \to 1$.

თეორემა 6.7. *ვთქვათ, $\phi(u)$ არაუარყოფითი, ამოზნექილი და არაკლებადი ფუნქციაა $u \ge 0$-თვის და ვთქვათ, $\phi(u)/u \to \infty$, როცა $u \to \infty$. იმისათვის, რომ $\sum A_n(x)$ ეკუთვნოდეს L_ϕ კლასს აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს პირობა:*

$$\int_0^{2\pi} \phi(|f(\rho,x)|)dx = O(1) \quad (0 \le \rho < 1). \tag{6.7}$$

თეორემა 6.8. *თუ* $\sum A_n(x)$ *არის* $S[f],\ f \in L_\phi$*, სადაც* $\phi(u)$ *არის ამოზნექილი, არაუარყოფითი და არაკლებადი ფუნქცია* $u \geq 0$*-თვის, მაშინ*

$$\int_0^{2\pi} \phi(|f(\rho,x)|)dx \to \int_0^{2\pi} \phi(|f|)dx \quad (\rho \to 1). \tag{6.8}$$

ამის გარდა, თუ $\phi(0)=0$*, მაშინ*

$$\int_0^{2\pi} \phi\left(\frac{1}{4}|f(\rho,x)-f(x)|\right)dx \to 0 \quad (\rho \to 1).$$

თეორემა 6.9. *იმისათვის, რომ* $\sum A_n(x)$ *ეკუთვნოდეს* L^r*,* $r>1$ *კლასს აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს პირობა:*

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho,x)|^r dx = O(1) \quad (\rho \to 1).$$

თუ $\sum A_n(x)$ *არის* $S[f]$*,*$f \in L^r$*,* $r \geq 1$*, მაშინ*

$$\int_0^{2\pi} |f(\rho,x)-f(x)|^r dx \to 0 \quad (\rho \to 1).$$

თეორემა 6.10. *თუ* $\sum A_n(x)$ *არის* $S[dF]$*, სადაც* F *აკმაყოფილებს* (6.6) *პირობას, თითოეული შემდეგი ორი პირობიდან არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისათვის, რომ* F *იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი* (α,β) *ინტერვალში:*

(i) *ფუნქციათა სიმრავლე* $\int_\alpha^x f(\rho,u)du$ *არის თანაბრად აბსოლუტურად უწყვეტი* (α,β)*-ში;*

(ii) $||f(\rho,x)-f(\rho',x);\alpha,\beta||_1 \to 0$ *როცა* $\rho,\rho' \to 1$.

თუ $f(\rho,x)$*-ს შევცვლით* $f^+(\rho,x)$*-ით, მივიღებთ* F *ფუნქციის* (α,β)*-ში ვარიაციის აბსოლუტურად უწყვეტობის აუცილებელ და საკმარის პირობებს.*

თეორემა 6.11. *ვთქვათ,* $\sum A_n(x)$ *არის* $S[dF]$*,* F *აკმაყოფილებს* (6.6) *პირობას და*

$$f(x) = \lim f(\rho,x) = F'(x).$$

მოცემული ორი პირობიდან

$$\int_\alpha^\beta |f(\rho,x)|dx \to \int_\alpha^\beta |f(x)|dx,\ \int_\alpha^\beta |f^+(\rho,x)|dx \to \int_\alpha^\beta |f^+(x)|dx,$$

პირველი არის აუცილებელი და საკმარისი პირობა, რომ F *იყოს აბსოლუტურად უწყვეტი* (α,β) *-ში, მეორე კი* F*-ის ამ ინტერვალში ვარიაციის აბსოლუტურად უწყვეტობისთვის.*

(5.8)-ის ანალოგია აბელის საშუალოსთვის არის

$$\int_0^{2\pi} \phi(|f(\rho,x)|)dx \leq \int_0^{2\pi} \phi(|f(x)|)dx. \tag{6.9}$$

ვთქვათ, $0 \leq \rho < \rho' < 1$ და $\rho = \rho' R$ სადაც $0 < R < 1$. (6.1)-დან ჩანს, რომ $f(\rho,x)$ არის პუასონის ინტეგრალი $f(\rho',x)$-ის და (6.9)-დან გამომდინარეობს

$$\int_0^{2\pi} \phi(|f(\rho,x)|)dx \leq \int_0^{2\pi} \phi(|f(\rho',x)|)dx,\ (0 \leq \rho < \rho' < 0). \tag{6.10}$$

ამრიგად,

თეორემა 6.12. *თუ $\phi(u)$ არის არაუარყოფითი, არაკლებადი და ამოზნექილი $u \geq 0$-თვის და $f(\rho, x)$ არის ჰარმონიული $\rho < 1$-თვის, ინტეგრალი $\int_0^{2\pi} \phi(|f(\rho, x)|)dx$ არის ρ-ს არაკლებადი ფუნქცია.*

შემთხვევა $\phi(u) = u^r$, $r \geq 1$ განსაკუთრებით საინტერესოა.

თუ $f(\rho, x)$ მოცემულია (6.4) ფორმულით, მაშინ $F = F_1 - F_2$, სადაც F_1, F_2 არაკლებადებია, ჩვენ წარმოვადგენთ $f(\rho, x)$-ს როგორც არაუარყოფითი ჰარმონიული ფუნქციის სხვაობას. თუ $f(\rho, x)$ არის არაუარყოფითი, (6.5) ინტეგრალი შემოსაზღბრულია. იგივე სრულდება თუ $f(\rho, x)$ არის ორი არაუარყოფითი ჰარმონიული ფუნქციის სხვაობა. ამრიგად,

თეორემა 6.13. *აუცილებელი და საკმარისი პირობა იმისთვის, რომ ჰარმონიული ფუნქცია $f(\rho, x)$, $0 \leq \rho < 1$ იყოს (6.4) სახით წარმოდგენადი, სადაც F სასრული ვარიაციის ფუნქციაა ფუნქციაა არის ის, რომ $f(\rho, x)$ იყოს ორი არაუარყოფითი ჰარმონიული ფუნქციის სხვაობა.*

ვთქვათ, $z = \rho e^{ix}$. პუასონის გული $P(\rho, x)$ არის

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + ... = \frac{1}{2}(1 + z)/(1 - z)$$

მწკვრივის ნამდვილი ნაწილი.

ამრიგად, ჰარმონიული ფუნქცია (6.4) არის ნამდვილი ნაწილი ფუნქციისა

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dF(t) \quad (z = \rho e^{ix}), \tag{6.11}$$

რომელიც რეგულარულია $|z| < 1$. $\Phi(z)$-ის წარმოსახვითი ნაწილი არის

$$\tilde{f}(\rho, x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{nu} \sin \nu x - b_{nu} \cos \nu x)\rho^{nu} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho \sin(x - t)}{1 - 2\rho \cos(x - t) + \rho^2} dF(t), \tag{6.12}$$

$f(\rho, x)$-ის შეუღლებული ჰარმონიული ფუნქცია, რომელიც ნულდება სათავეში. აქედან,

თეორემა 6.14. *ფუნქცია $\Phi(z)$, $\mathcal{F}\Phi(0) = 0$, რეგულარული $|z| < 0$-თვის,აქვს არაუარყოფითი ნამდვილი ნაწილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\Phi(z)$ მოცემულია (6.11) ფორმულით, სადაც $F(t)$ არის არაკლებადი და შემოსაზღვრული.*

(6.5) ინტეგრალის შემოსაზღვრულობიდან არ გამომდინარეობს $\tilde{f}(\rho, x)$ ინტეგრალის შემოსაზღვრულობა, რაც ჩანს მაგალითიდან

$$f(\rho, x) = P(\rho, x), \quad \tilde{f}(\rho, x) = Q(\rho, x).$$

($||Q(\rho, x)||_1 \neq O(1)$ შეიძლება ასევე დამტკიცდეს პირდაპირ ან იქედან $\sin x + \sin 2x + ...$ არ არის $S[dF]$.) მეორეს მხვრივ:

თეორემა 6.15. *დავუშვათ, რომ (6.5) ინტეგრალი არ არის მეტი C-ზე $0 \leq \rho < 1$-თვის. მაშინ $\rho^{-1}|\tilde{f}(\rho, x)|$ (უფრო მეტიც, იგივე სრულდება $|\tilde{f}(\rho, x)|$-თვისაც) ერთეულოვანი წრეწირის დიამეტრის გასწვრივ არ გადააჭარბებს $\frac{1}{2}C$.*

შედეგი არის საკმაოდ ელემენტარული და წესით არ უნდა იყოს გამოყენებული (6.4)-ის წარმოდგენაში, რომლის დამტკიცებაც არის ბევრად სიღრმისეული, თავდაპირველად დავუშვათ, რომ $f(\rho,x)$ უწყვეტია $\rho \leq 1$-თვის. მაშინ $f(\rho,x)$ არის პუასონის ინტეგრალი $f(x)=f(1,x)$-სა და

$$\tilde{f} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)Q(\rho,t)dt,$$

$$\int_0^1 \rho^{-1}\left(|\tilde{f}(\rho,x)|+|\tilde{f}(\rho,x+\pi)|\right)d\rho \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+x)|\cdot\left\{\int_0^1 \rho^{-1}\left(|Q(\rho,t)|+|Q(\rho,t+\pi)|\right)d\rho\right\}dt$$

ფიგურულ ფრჩხილებში მოცემულ შეფასებაში შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $0<t<\pi$. მაშინ $Q(\rho,t)>0$, $Q(\rho,t+\pi)<0$, პასუხი კითხვაზე არის

$$\lim_{R\to 1}\int_0^R \rho^{-1}\left(|Q(\rho,t)|-|Q(\rho,t+\pi)|\right)d\rho = \lim_{R\to 1}\int_0^R\left[\sum_1^\infty \rho^{\nu-1}\sin\nu t - \sum_1^\infty(-1)^\nu\rho^{\nu-1}\sin\nu t\right]d\rho$$

$$= \lim_{R\to 1} 2\sum_{\nu=1}^\infty R^{2\nu-1}\frac{\sin(2\nu-1)t}{2\nu-1} = \frac{1}{2}\pi$$

(იხილე I თავი, (4.13)) და მთლიანი გამოსახულება მარჯვენა მხარეში არის

$$\frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+x)|dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt \leq \frac{1}{2}C.$$

საზოგადოდ, ჩვენ დავაფიქსირებთ R-ს (0<R<1), და გამოვიყენოთ მიღებული შედეგი ფუნქციისთვის

$$f_1(\rho,x) = f(\rho R, x),$$

რომელიც არის ჰარმონიული და უწყვეტი $\rho \leq 1$-თვის. რადგან $||f_1(\rho,x);0,2\pi||_1 \leq C$, ინტეგრალი

$$\int_0^1 \rho^{-1}\left(|\tilde{f}_1(\rho,x)|+|\tilde{f}_1(\rho,x+\pi)|\right)d\rho = \int_0^R \rho^{-1}\left(|\tilde{f}(\rho,x)|+|\tilde{f}(\rho,x+\pi)|\right)d\rho$$

არ გადააჭარბებს $\frac{1}{2}C$-ს. მტკიცება დამთავრდება თუ გადავალთ $R\to 1$ ზღვარზე.

ვთქვათ $U(\rho,x)$ არის ჰარმონიული ფუნქცია $\rho \leq 1$-თვის და ვთქვათ, $V(\rho,x)$ არის შეუღლებული ფუნქცია. ჰარმონიული ფუნქცია $v(\rho,x)=U_x(\rho,x)$ ნულდება სათავეში (შევნიშნოთ, რომ V არის $\sum A_n(x)\rho^n$ სახის) და შეუღლებულია $u(\rho,x)=U_x(\rho,x)$ ფუნქციის. დავუშვათ, რომ U აკმაყოფილებს პირობა

$$||U_x(\rho,x);0,2\pi||_1 \leq C, \quad 0\leq\rho<1.$$

მაშინ თეორემა 6.15-დან და კოში-რიმანის ტოლობებიდან გამომდინარეობს

$$\int_D |\rho^{-1}v|d\rho = \int_D |\rho^{-1}V_x|d\rho = \int_D |U_\rho|d\rho\frac{1}{2}C,$$

ინტეგრება ხდება ერთეულოვანი წრეწირის D დიამეტრის გასწვრივ. უკანასკნელი ინტეგრალი არის U-ს სრული ვარიაცია D-ზე. ამრიგად, თეორემა 6.15 შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად:

თეორემა 6.16. *ვთქვათ, $U(x)$ ჰარმონიულია $\rho<1$-თვის. თუ U-ს სრული ვარიაცია ყოველ $\rho=\rho_0<1$ წრეზე არ არის მეტი C-ზე, მაშინ U-ს სრული ვარიაცია ერთეულოვანი წრის ნებისმიერ დიამეტრზე არ გადააჭარბებს $\frac{1}{2}C$-ს.*

განვიხილოთ, $f \in L^p$, $p \geq 1$ ფუნქციის პუასონის $f(\rho, x)$ ინტეგრალი (III თავი, (6.4)) და დავუშვათ, რომ

(6.13) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho,x)|^p dx \leq M^p \quad (0 \leq \rho < 1).$$

აქედან ჩვენ გამოვიყვანთ შეფასებას $\mathfrak{U}_r[f(\rho,x)]$-თვის, როცა $r > p$. (6.3)-ზე გავავრცელოთ II თავის თეორემა (1.15). თუ q განსაზღვრულია $1/r = 1/p + 1/q - 1$ ფორმულით (შევნიშნოთ $q > 1$-ზე), მაშინ

(6.14) $$\mathfrak{U}_r[f(\rho,x)] \leq \mathfrak{U}_p[f]\mathfrak{U}_q[2P(\rho,t)].$$

იმისათვის, რომ შევაფასოთ $\mathfrak{U}_q[P(\rho,t)]$ ჩვენ გამოვიყენებთ III თავის (6.9) უტოლობებს , სადაც ვიგულისხმებთ, რომ $A > 1$ და მივიღებთ

$$\mathfrak{U}_q^q[P(\rho,t)] \leq \frac{2}{2\pi}\int_0^{\delta} \delta^{-q} dt + \frac{2}{2\pi} A^q \delta^q \int_{\delta}^{\infty} t^{-2q} dt \leq A^q \delta^{1-q},$$

(6.15) $$\mathfrak{U}_q[P(\rho,t)] \leq A\delta^{-1/q'}$$

აქედან, $1/q' = 1/p - 1/r$ აღნიშვნით, მივიღებთ:

თეორემა 6.17. *თუ* (6.13) *სრულდება რაიმე* $p \geq 1$-*თვის, მაშინ*

$$\mathfrak{U}_r[f(\rho,x)] \leq BM(1-\rho)^{1/r-1/p}$$

$r > p$-*თვის, სადაც* B *აღნიშნავს აბსოლუტურ მუდმივს.*

f-თვის შესაბამის პოლინომის გამოკლებით, შეგვიძლია M გავხადოთ ნებისმიერად მცირე, მაშასადამე

თეორემა 6.18. *თუ* $\sum A_n(x)$ *არის* L^p-*ში,* $p \geq 1$, *მაშინ*

$$\mathfrak{U}_r[f(\rho,x)] = o\{(1-\rho)^{1/r-1/p}\}$$

როცა $\rho \to 1$.

შემდეგი შედეგი განაზოგადებს თეორემა 6.17-ს

თეორემა 6.19. *თუ* $\mathfrak{U}_p[f(\rho,x)] \leq M(1-\rho)^{-\beta}$ *რაიმე* $\rho \geq 1$ *და* $\beta > 0$-*თვის, მაშინ*

$$\mathfrak{U}_r[f(\rho,x)] \leq MB_{\beta}(1-\rho)^{-\beta+1/r-1/p}$$

$r > \rho$-*თვის, სადაც* B_{β} *დამოკიდებულია მხოლოდ* β-*ზე.*

Proof. ვთქვათ

$$0 < \rho < 1, \quad \rho_1 = \rho^{1/2}, \quad g(x) = f(\rho_1, x).$$

რადგან $\rho_1 > \rho$, $f(\rho, x)$ არის პუასონის ინტეგრალი $g(x)$-დან: $f(\rho, x) = g(\rho_1, x)$. დაშვებიდან გამომრინარეობს, რომ

$$\mathfrak{U}_p(g) = \mathfrak{U}_p[f(\rho_1, x)] \leq M(1-\rho_1)^{-\beta},$$

თეორემა 6.17-დან g-ზე გადასვლით მივიღებთ

$$\mathfrak{U}_r[f(\rho, x)] = \mathfrak{U}_r[g(\rho_1, x)] \leq BM(1-\rho_1)^{-\beta}(1-\rho_1)^{1/r-1/p} = BM(1-\rho_1)^{-\beta+1/r-1/p}.$$

რადგან $(1-\rho_1)/(1-\rho)$ არის $\frac{1}{2}$ და 1-ს შორის, თეორემა 6.19 სამართლიანია და $B_\beta = 2^{\beta+1}B$. დასკვნაში "O" დიდი არ შეიძლება შეიცვალოს "o" მცირეთი, როგორც ეს იყო თეორემა თეორემა 6.17-ში. □

შემდეგი არის თეორემა 6.17-ის ანალოგი ტრიგონომეტრიული პოლინომებისთვის. ჩვენ გვქონდა შეფასება $f(\rho, x)$ ჰარმონიული ფუნქციებისთვი და ახლა მივიღებთ შესაბამის შეფასებებს $n \sim 1/(1-\rho)$ რიგის პოლინომებისთვის.

თეორემა 6.20. *თუ T არის n რიგის პოლინომი, მაშინ*

$$\mathfrak{U}[T] \leq Bn^{1/p-1/r}\mathfrak{U}_p[T] \tag{6.16}$$

$r > p \geq 1$-თვის, სადაც B არის აბსოლუტური მუდმივი.

Proof. ფეიერი გული $K_n(t)$ აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\mathfrak{U}_q[K_n] \leq An^{1/q'} \tag{6.17}$$

(6.15)-ის ანალოგიით. რადგან უკვე შევნიშნეთ რომ (გვ. 97) $K_n(t)$-სა და $P(\rho, t)$-ს შეფასებები იდენტურია თუ n-ს და $1/(1-\rho)$-ს მიახლოებიტ ერთნაირს ავიღებთ. თუ σ_k-ები არის T-ს $(C, 1)$ საშუალოები, ჩვენ გვაქვს უტოლობა (შეადარეთ (6.14)-ს)

$$\mathfrak{U}_r[\sigma_k] \leq \mathfrak{U}_p[T]\mathfrak{U}_q[2K_k] \leq A\mathfrak{U}_p[T]k^{1/q'}. \tag{6.18}$$

$\tau_n = 2\sigma_{2n-1} - \sigma_{n-a}$-თვის გვქავს

$$\mathfrak{U}_r[\tau_n] \leq A\mathfrak{U}_p[T]\left\{2(2n)^{1/q'+n^{1/q'}}\right\} \leq 5A\mathfrak{U}_p[T]n^{1/q'}$$

და ეს საკმარისია თუ შევნიშნავთ, რომ $\tau_n = T$. □

7. $S[f]$-ის აბელისა და ჩეზაროს საშუალოების მაჟორანტები

ამ საშუალოებს აქვს მარტივი შეფასებები შემდეგი არაუარყოფით ფუნქციის თვალსაზრისით

$$M(x) = M_j(x) = \sup_{|t|\le\pi} \frac{1}{t}\int_0^t |f(x+u)|du$$

რომელიც შემორებულია I თავის მე-13 პარაგრაფში. დამტკიცებები დაფუძვნებული შემდეგ ლემაზე:

ლემა 7.1. *ვთქვათ, $\chi(t,p)$, $-\pi \le t \le \pi$, არის p პარამეტრზე დამოკიდებული არაუარყოფითი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს*

$$(7.1)\qquad (i)\quad \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t,p)dt \le K, \quad (ii)|; \int_{-\pi}^{\pi}\left|t\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,p)\right| dt \le K_1,$$

სადაც K და K_1 დამოუკიდებელია p-გან.თუ

$$(7.2)\qquad f(x,p) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\chi(t,p)dt,$$

მაშინ

$$(7.3)\qquad \sup_p |h(x,p)| \le AM(x),$$

სადაც A დამოკიდებულია მხოლოდ K-სა და K_1-ზე

Proof. ვთქვათ, $F(t) = \int_0^t F(x+u)du$ ფიქსირებული x-თვის. მაშინ (7.2)-ში ნაწილობითი ინტეგრებითა და $|F(t)| \le |t|M(x)$ უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$|h(x,p)| \le M(x)\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\left|t\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,p)\right| dt + [\pi\chi(\pi,p)+\pi\chi(-\pi,p)]\right\}.$$

კუთხურ ფრჩხილებში მოთავსებული წევრი არ გადააჭარბებს $K+K_1$, რომელსაც მივიღებთ (7.1)(i)-ის შემდეგი ფორმით ჩაწერით

$$-\int_{-\pi}^{\pi} t\frac{\partial\chi}{\partial t}dt + \pi[\chi(\pi,p)+\chi(-\pi,p)] \le K$$

და (7.1)(ii)-ის გამოყენებით. შევკრიბოთ

$$|h(x,p)| \le (2K_1+K)M(x),$$

და (7.3) დამტკიცებულია. □

მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ თუ $t\frac{\partial\chi}{\partial t}$-ს აქვს მუდმივი ნიშანი და $\chi(\pm\pi,p)$ არიან p ცვლადის შემოსაზღვრული ფუნქციები, მაშინ (7.1)(ii) არის (7.1)(i)-ის შედეგი. ამას მივიღებთ თუ დავსვამთ ნიშანს და (7.1)(Ii)-ს ვაინტეგრებთ ნაწილობითი ინტეგრების მეთოდით. (7.3)-ისა და I თავის (13.7) უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ შემდეგ თეორემას:

თეორემა 7.2. *ლემა 7.1-ის პირობებში, ფუნქცია*

$$N(x) = \sup_{p} |h(x,p)|$$

აკმაყოფილებს უტოლობებს

$$\int_{-\pi}^{\pi} N^r(x)dx \le A_r \int_{-\pi}^{\pi} |f|^r dx \ \ (r > 1),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} N^\alpha(x)dx \le A_\alpha \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|dx\right)^\alpha \ \ (0 < \alpha < 1), \tag{7.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} N(x)dx \le A \int_{-\pi}^{\pi} |f| \log^+ |f|dx + A,$$

სადაც მუდმივები დამოკიდებული მხოლოდ მითითებულ ინდექსებზე და K-სა და K_1-ზე.

მნიშვნელოვანია შევნიშნოთ, რომ A_r დარჩება შემოსაზღვრული, როცა $r \to +\infty$.

შევნიშნოთ რამდენიმე კერძო შემთხვევა χ ფუნქციის. ერთერთი არის პუასონის $P(\rho, t)$ გული; მისთვის (7.1)-ის პირველი უტოლობა ცნობილია, ხოლო მეორე გამომდინარეობს იქედან, რომ $tdP/dt \le 0$ და

$$P(\rho, \pm\pi) = O(1).$$

ფეიერის საშუალო აკმაყოფილებს პირველ უტოლობას, მაგრამ არა მეორეს . იგივე სრულდება $K_n^\delta(t)$, $0 < \delta \le 1$ გულისთვის, რომელიც მუდმივ ნიშნიანია თუ $\delta < 1$. $K_n^\delta(t)$ გული შეიძლება მაჟორირდეს ფუნქციით, რომელიც აკმაყოფილებს (7.1)-ს, კერძოდ,

$$|K_n^\delta(t)| \le \frac{c(\delta)}{(1+n|t|)^{\delta+1}}, \quad n \ge 1, |t| \le \pi, \tag{7.5}$$

სადაც $c(\delta)$ დამოკიდებულია მხოლოდ δ-ზე$(0 < \delta \le 1)$. ვთქვათ, $H_n(t)$-თი აღვნიშნოთ მარჯვენა მხარეში მოთავსებული გამოსახულება. ის გადააჭარბებს $2^{-\delta-1}c(\delta)n$ და $c(\delta)/2^{\delta+1}n^\delta|t|^{\delta+1}$ სიდიდეებს სულ მცირე ერთ წერტილში მაინც. აქედან, III თავის (5.5)-ის ძალით ის აღემატება $|K_n^\delta(t)|$-ს იმ პირობით, რომ $c(\delta)$ არის საკმარისად დიდი. ადვილი საჩვენებელია, რომ $H_n(t)$ აკმაყოფილებს (7.1)-ის პირველ უტოლობას, საიდანაც მეორე უტოლობა გამომდინარეობს, რადგან $|tH_n'(t)| \le (1+\delta)H_n(t)$. ამრიგად:

თეორემა 7.3. *(7.4) უტოლობები სრულდება თუ $N(x)$ არის ერთ-ერთი ფუნქცია ქვემოთ მოცემულთაგან*

$$\sup_{\rho<1} |f(\rho, x)|, \quad \sup_{n\ge1} |\sigma_n^\delta(x)|.$$

აქაც მუდმივები დამოკიდებულია მითითებულ ინდექსებზე და მეორე შემთხვევაში δ-ზეც.

ვთქვათ, $\zeta = \rho e^{i\theta}$. ყოველი $0 \le \sigma < 1$-თვის Ω_σ-აღვნიშნოთ ღია არე, რომელიც შემოსაზღვრულია ორი მხებით $\zeta = 1$-დან $|\zeta| = \sigma$ წრემდე და მუდმივობის წერტილებს შორის უშორესი

რკალებით. $\Omega_\sigma(x)$-ით აღვნიშნოთ Ω_σ არის სათავის გარშემო მობრუნება x კუთხით. თუ $f(\rho,\theta)$ არის f-ის პუასონის ინტეგრალი

$$N(x) = N_{\sigma,j}(x) = \sup_{\zeta\in\Omega_\sigma(x)} |f(\rho,\theta)|. \tag{7.6}$$

ცხადია, N არის σ ცვლადის ზრდადი ფუნქცია.

თეორემა 7.4. *(7.6)-ში მოცემული $N(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (7.4) უტოლობებს, სადაც მუდმივები დამოკიდებულია σ-ზე.*

Proof. დავაფიქსიროთ, და ვთქვათ $\zeta = \rho e^{i\theta}$, $p = e^{i(\theta - x)}$. $\zeta \in \Omega_\sigma(x)$-თვის გვაქვს

$$f(\rho,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\chi(t,p)dt, \ \ \chi(t,p) = \frac{1}{\pi}P(\rho, t + x - \theta).$$

გამოსახულება $\chi(t,p)$ აქ დამოკიდებულია t ცვლადზე და p პარამეტრზე, რომელიც არის Ω_σ-ს წერტილი. (7.1)(i) რომ სრულდება ცხადია. (7.1)(ii)-ის მარჯვენა მხარე, სადაც $\xi = x - \theta$, $P' = dP/dt$, არის

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |tP'(\rho, t+\xi)|dt \le \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\pi|\sin\frac{1}{2}tP'(\rho,t+\xi)|dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |\sin\frac{1}{2}(t-\xi)P'(\rho,t)|dt \le \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |tP'(\rho,t)|dt + \frac{1}{2}|\xi|\int_{-\pi}^{\pi}|P'(\rho,t)|dt.$$

როგორც ვიცით, ბოლოსწინა ინტეგრალი შემოსაზღვრულია. უკანასკნელი ინტეგრალი არის

$$-|\xi|\int_0^{\pi} \frac{d}{dt}P(\rho,t)dt \le\le \frac{|\xi|}{1-\rho} = \frac{|x-\theta|}{1-\rho}.$$

$\rho \ge \sigma$ და $\rho < \sigma$ შემთხვევების ცალ-ცალკე განხილვით დავინახავთ, რომ უკანასკნელი გამოსახულება არ გადააჭარბებს მუდმივს, რომელიც მხოლოდ σ-ზეა დამოკიდებული. ეს ამტკიცებს (7.1)(ii)-ს და აგრეთვე თეორემას. $\square$

თეორემა 7.4-ის ძალიან მნიშვნელოვანი კერძო შემთხვევაა $\sigma = 0$, როდესაც Ω_σ გადაგვარდება ერთეულოვანი წრის რადიუსში და თეორემა 7.4 დაიყვანება თეორემა 7.3-ზე. ამ პარაგრაფის შედეგები შეგვიძლია გავავრცელოთ ფურიე-სტილტიესის მწკრივებზე, განზოგადება არ მოითხოვს ახალ იდეებს. სიმარტივისთვის ყურადღება გავამახვილოთ თეორემა 7.3-ზე.

თეორემა 7.5. *ვთქვათ σ_n და $f(r,x)$ არიან $(C,1)$და აბელის საშუალოები $S[dF]$-ში, და ვთქვათ, $N(x)$ არის ერთერთი ფუნქცია თეორემა 7.3-დან. მაშინ*

$$||N||_\alpha \le C_\alpha \int_0^{2\pi} |dF(x)| \ \ (0<\alpha<1), \tag{7.7}$$

და

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(x) - F'(x)|^\alpha dx \to, \ \ \int_0^{2\pi} |f(r,x) - F'(x)|^\alpha dx \to 0 \ \ (0<\alpha<1) \tag{7.8}$$

ვთქვათ, $0 < R < 1$, $N_R(x) = \max_{r\le R}|f(r,x)|$. თეორემა 7.3 და თეორემა 6.2-ის ბოლო უტოლობიდან მივიღებთ

$$||N_R(x)||_\alpha \le C_\alpha \int_0^{2\pi} |f(R,x)|dx \le C_\alpha \int_0^{2\pi} |dF(x)|,$$

და $R \to 1$ ზღვარზე გადასვლით (7.7)-ს აბელის საშუალოებისთვის. $(f(R,x))$-ის $(C,1)$საშუალოს განხილვით და $R \to 1$ ზღვარზე გადასვლით ვაჩვენებთ (7.7)-ის დანარცენ ნაწილს. (7.8) მიმართებები გამომდინარეობს ფაქტიდან, რომ $|\sigma_n(x)-F'(x)|$ და $|f(r,x)-F'(x)|^\alpha$ მიისწრაფვიან 0-კენ თითქმის ყველგან (იხილე III თავი, (7.2) და პარ. 8) და მაჟორირდება ინტეგრებადი ფუნქციებით.

ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

[1] *Zygmund A.,* Trigonometric series, Cambridge University Press, Cambridge 2002;

[2] *Carleson L.,* On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta Mathematica, 116, 135-157(1966).