ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

კონფორმული მოდულების გამოთვლა

მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი კაკულაშვილი

(სამეცნიერო კვლევითი პროექტი 1)

ხელმძღვანელი:

ფიზიკა – მათემატიკის მეცნიერებათა
დოქტორი
ასოცირებული პროფესორი
გია გიორგაძე

თბილისი 2018

სარჩევი

ᲨᲔᲡᲐᲕᲐᲚᲘ

ცნობილია, რომ $X_m = CP^1 - \{s_1, \ldots, s_m\}$, სადაც CP^1 რიმანის სფეროა, მრავალსახეობის კომპლექსური სტრუქტურა $3m-3$ კომპლექსური პარამეტრით ხასიათდება. როდესაც $m \leq 3$, X_m–ის კომპლექსური სტრუქტურა დამოკიდებული არ არის წერტილების განლაგებაზე რიმანის სფეროზე და ამრიგად X_m–ის კომპლექსური სტრუქტურა ერთადერთია. როდესაც $m \geq 4$, X_m–ის კომპლექსური სტრუქტურა წერტილების კონფიგურაციაზეა დამოკიდებული და არსებობს არა ექვივალენტურია კონფიგურაციები. როდესაც $m = 4$, ორი კომპლქსური მრავალსახეობა ბიჰოლომორფულად ექვივალენტურია, თუ მათი კონფორმული მოდულები ტოლია. ამ შემთხვევაში შესაბამისი მრავალსახეობების კომპლექსური სტრუქტურები ექვივალენტურია. ექვივალენტური კომპლექსური სტრუქტურების კვლევა საყოველთაოდ ცნობილი და აქტუალური პრობლემაა მისი მრავალმრივი გამოყენენების გამო არა მარტო მათემატიკაში, არამედ მომიჯნავე დარგებშიც.

კონფორმული მოდულის განსაზღვრება

კონფორმული მოდული Γ წირების ოჯახისთვის განისაზღვრება, როგორც

$$M(\Gamma) = \frac{\mathcal{K}'(k)}{2\mathcal{K}(k)}, \text{ სადაც } k = \psi^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

ψ განსიზღვრება, როფორც

$$\psi(r) = \frac{2\left(\mathcal{E}(r) - (1-r)\mathcal{K}(r)\right)}{\mathcal{E}'(r) - r\mathcal{K}'(r)}$$

სადაც $\psi : (0,1) \to (0,\infty)$ განსაზღვარს ზრდად ჰომეომორფიზმს ზღვრული წერტილებით $0, \infty$ წერტილებში $0, 1$, შესაბამისად მისი შექცეული არის განსაზღვული.

ψ ფუნქცია განსაზღვულია ჰიპერგეომეტრიული და სრული ელიფსური ინტეგრალებით

$$\mathcal{K}(r) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 t}}, \quad \mathcal{E}(r) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - r^2 \sin^2 t}dt$$

$$\mathcal{K}'(r) = \mathcal{K}(r'), \quad \mathcal{E}'(r) = \mathcal{E}(r')$$

სადაც $r \in (0,1)$ და $r' = \sqrt{1-r^2}$. მოცემული ფუნქცია შესაძლებელია გადაიწეროს ხარისხოვანი მწკრივის სახით

$$\mathcal{K}(r) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, r^2\right), \quad \mathcal{E}(r) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, r^2\right)$$

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(a,b,c) z^n, \quad f_n(a,b,c) = \frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)} \frac{1}{n!}$$

$$\mathcal{K}(r) = \frac{\pi}{2} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; r^2) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n r^{2n}, \quad k_n = \frac{\pi}{2} f_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\mathcal{E}(r) = \frac{\pi}{2} F(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; r^2) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n r^{2n}, \quad e_n = \frac{\pi}{2} f_n\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\mathcal{K}'(r) = \mathcal{K}(r') = \sum_{n=0}^{\infty} k_n (1-r^2)^n$$

$$\mathcal{E}'(r) = \mathcal{E}(r') = \sum_{n=0}^{\infty} e_n (1-r^2)^n$$

ψ ფუნქციის მრიცხველთან და მნიშვლეთან უნდა გავშალოთ მწკრივებად. მრიცხველითვის ვიღებთ შემდეგ გაშლას

$$\mathcal{E}(r)-(1-r)\mathcal{K}(r)=\sum_{n=0}^{\infty}(e_n-k_n)r^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}k_nr^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}u_nr^n$$

$$u_{2n}=e_n-k_n,\quad u_{2n+1}=k_n,\quad u_0=0$$

და მნიშვნელისთვის ჩვენ ვიღებთ

$$\mathcal{E}(r)-r'\mathcal{K}(r)=\sum_{j=0}^{\infty}e_jr^{2j}-\sqrt{1-r^2}\sum_{j=0}^{\infty}k_jr^{2j}=\sum_{j=0}^{\infty}e_jr^{2j}-\sum_{i=0}^{\infty}\binom{1/2}{i}(-1)^ir^{2i}\sum_{j=0}^{\infty}k_jr^{2j}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}e_jr^{2j}-\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^i\binom{1/2}{i}k_jr^{2(i+j)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e_nr^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}^{\infty}(-1)^i\binom{1/2}{i}k_j\right)r^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}e_nr^{2n}-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{n-j}\binom{1/2}{n-j}k_j\right)r^{2n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(e_n-\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{1/2}{n-j}k_j\right)r^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}v_nr^{2n}$$

სადაც

$$v_n=e_n-\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{1/2}{n-j}k_j,\quad v_0=v_1=0$$

ახლა ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\frac{1}{\mathcal{E}(r)-r'\mathcal{K}(r)}=\frac{1}{v_2r^4+v_3r^6+v_4r^8+\cdots}=\frac{1}{v_2r^4}\frac{1}{1+(v_3/v_2)(r^2)^1+(v_4/v_2)(r^2)^2+\cdots}$$

$$=\frac{1}{v_2r^4}\left(1+w_1(r^2)^1+w_2(r^2)^2+\cdots\right)=\frac{1}{v_2r^4}\sum_{n=0}^{\infty}w_nr^{2n}$$

სადაც

$$w_0=1,\quad w_n=\sum_{s_1+2s_2+\cdots+ns_n=n}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}\,(s_1+\cdots+s_n)!\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{s_j!}\left(\frac{v_{j+2}}{v_2}\right)^{s_j}$$

აქედან გამომდინრე, ψ ფუნქციას აქვს შემდეგი სახით

$$\psi(r) = \frac{2}{v_2(1-r^2)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n (1-r^2)^n\right)$$

ჩვენ შეგვიძლია ეს ნამრავლის პირველი წევრიც გავშალოთ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-r^2)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n r^n\right) &= \left(\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)r^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} u_{2j} r^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} u_{2j+1} r^{2j+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)u_{2j} r^{2(i+j)} + \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)u_{2j+1} r^{2(i+j)+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}(i+1)u_{2j}\right) r^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}(i+1)u_{2j+1}\right) r^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(n-j+1)u_{2j}\right) r^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}(n-j+1)u_{2j+1}\right) r^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} h_n r^n
\end{aligned}$$

$$h_{2n} = \sum_{j=0}^{n}(n-j+1)u_{2j}, \quad h_{2n+1} = \sum_{j=0}^{n}(n-j+1)u_{2j+1}$$

და ჩვენ მივიღეთ, რომ ψ ჩაიწერება, როგორც ორი ხარისხოვანი მწკრივის ნამრავლი

$$\psi(r) = \frac{2}{v_2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n r^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n (1-r^2)^n\right)$$

თუ გამოვიყენებთ ნიუტის ბინომს, მაშინ მიღებული მწკრივის კოეფიციენტები წევრების რაოდენობაზე გახდე-ბიან დამოკიდებული

$$\begin{aligned}
\psi_N(r) = \frac{2}{v_2}\left(\sum_{n=0}^{2N+1} h_n r^n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} w_n (1-r^2)^n\right) &= \frac{2}{v_2}\left(\sum_{i=0}^{2N+1} h_i r^i\right)\left(\sum_{n=0}^{N} w_n \sum_{j=0}^{N}\binom{n}{j}(-1)^j r^{2j}\right) \\
&= \frac{2}{v_2}\left(\sum_{i=0}^{2N+1} h_i r^i\right)\sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{N}\binom{n}{j} w_n\right)(-1)^j r^{2j} \\
&= \frac{2}{v_2}\left(\sum_{i=0}^{N} h_{2i} r^{2i} + \sum_{i=0}^{N} h_{2i+1} r^{2i+1}\right)\sum_{j=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{N}\binom{n}{j} w_n\right)(-1)^j r^{2j} \\
&= \frac{2}{v_2}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}(-1)^j W_{N,j} h_{2i} r^{2(i+j)} + \frac{2}{v_2}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}(-1)^j W_{N,j} h_{2i+1} r^{2(i+j)+1} \\
&= \sum_{s=0}^{2N} H_{N,s} r^s
\end{aligned}$$

სადაც

$$W_{N,j} = \sum_{n=0}^{N}\binom{n}{j} w_n, \quad H_{N,2s} = \frac{2}{v_2}\sum_{i=0}^{N}(-1)^{s-i} W_{N,s-i} h_{2i},$$

$$H_{N,2s+1} = \frac{2}{v_2}\sum_{i=0}^{N}(-1)^{s-j}W_{N,s-i}h_{2i+1}$$

რადგან $H_{N,0} = 0$, ჩვენ ვიღებთ

$$\psi_N(r) = \sum_{n=1}^{2N} H_{N,n}r^n = H_{N,1}r + H_{N,2}r^2 + \cdots + H_{N,2N}r^{2N}$$

მაგალითად, თუ $N = 20$

$$\begin{aligned}\psi_{20}(r) \approx\ & 4.99r - 2.5r^2 + 56.43r^3 - 28.53r^4 + 22.98r^5 - 15.17r^6 + 333.84r^7 \\ & - 170.22r^8 - 381.83r^9 + 168.13r^{10} + 1440.84r^{11} - 708.32r^{12} - 1850.33r^{13} \\ & + 839.36r^{14} + 3375.48r^{15} - 1615.08r^{16} - 3165.79r^{17} + 1402.04r^{18} + 3848.5r^{19} \\ & - 1814.89r^{20} - 2162.26r^{21} + 883.08r^{22} + 2258.25r^{23} - 1091.53r^{24} - 248.46r^{25} \\ & - 12.19r^{26} + 1033.12r^{27} - 574.0r^{28} + 632.18r^{29} - 422.53r^{30} + 828.99r^{31} \\ & - 518.8r^{32} + 862.08r^{33} - 549.72r^{34} + 929.42r^{35} - 594.23r^{36} + 992.6r^{37} \\ & - 637.57r^{38} + 1056.72r^{39} - 681.57r^{40}\end{aligned}$$

$$|\psi_{20}(r) - \psi(r)| < 0.08,\ \ r \in (0, 0.7)$$

ლიტერატურა

[1] H. HAKULA, A. RASILA, M. VUORINEN Computation of exterior moduli of quadrilaterals, 2012

[2] M. VUORINEN, X. ZHANG On exterior moduli of quadrilaterals and special functions, 2013

[3] G. Kakulashvili, On The Schwarz-Christoffel Parameters Problem, 2019