ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

დოქტორანტის სემინარი 2

შანსების ალგორითმი

დოქტორანტი: თინა მგელაძე

ხელმძღვანელი :

ასოც. პროფესორი

მალხაზ შაშიაშვილი

თბილისი 2020

სარჩევი

აბსტრაქტი

მოცემნული ნაშრომი დაწერილია ტომას ბრუსის სტატიის მიხედვით (,,SUM THE ODDS TO ONE AND STOP''). ნაშრომის მიზანია წარმოადგინოს ორი თეორემა, რომელიც პირდაპირ შიეძლება გამოყენებულ იქნას ოპტიმალური გაჩერების ამოცანებისთვის, რომლებიც შეიცავენ დამოუკიდებელ ინდიკატორულ ფუნქციებს. დამტკიცებები ელემენტარულია. ნაშრომის ერთ-ერთი შედეგი არის ოპტიმალური გაჩერების წესის და მისი მნიშვნელობის პოვნის ალგორითმი. ჩვენ გამოვიყენებთ მათ რამდენიმე ამოცანისთვის, რომელშიც მონაწილეობს დამოუკიდებელი ინდიკატორული ფუნქციების მიმდევრობა. მათ შორის განვიხილავთ მიმდევრობებს შემთხვევითი სიგძით.

1. ამოცანის დასმა

$I_1, I_2, I_3, I_4, \dots I_n$ წარმოადგენს $A_1, A_2, \dots, A_n$ხდომილობების ინდიკატორულ ფუნქციებს, სადაც $A_1, A_2, \dots, A_n$ წარმოადგენს ხდომილობებს (Ω, A, P) ალბათური სივრციდან.

ვაკვირდებით $I_1, I_2, I_3, I_4, \dots I_n$ მიმდევობით და შეგვიძლია გავჩერდეთ ნებისმიერ ადგილას, მაგრამ შეგვიძლია არც გავჩერდეთ იმის მიხედვით თუ რა იქნება I_k-ები.

თუ $I_k = 1$ მაშინ k-ს ვეძახით ,,წარმატების დროს''.Φ -ით ავღნიშნოთ ყველა ისეთ t წესების კლასი, სადაც $\{t = k\}\epsilon\sigma(I_1, I_2, I_3, I_4, \dots I_{k)}$, სადაც $\sigma(I_1, I_2, I_3, I_4, \dots I_{k)}$ აღნიშნავს სიგმა ალგებრას წარმოქმნილს $I_1, I_2, I_3, I_4, \dots I_k$ფუნქციებით.

ჩვენი მიზანია ვიპოვნოთ ოპტიმალური წესი, ანუ გაჩერების წესი $\tau_n \epsilon \Phi$, რომელიც აკეთებს მაქსიმიზაციას $P(I_t, I_{t+1}, I_{t+2}, \dots I_n = 0)$ $t\epsilon\Phi$-სთვის.

2. ოპტიმალური გაჩერების წესი

წინამდებარე თეორემა არის ნაშრომის ძირითადი შედეგი

თეორემა 1 (შანსების თეორემა)

$I_1, I_2, I_3, I_4, \dots I_n$ დამოუკიდებელი ინდიკატორების ფუნქციების მიმდევრობაა.

$p_j = E(I_j); \quad q_j = 1 - p_j; \quad r_j = \frac{p_j}{q_j}$

მაშინ ბოლო წარმატებაზე გაჩერების ოპტიმალური წესი τ_n არსებობს და წარმოადგენს პირველ ინდექს $\mathrm{k} - \mathrm{ს}$

$$\mathrm{s} = \sup\left\{1, \quad \sup\left\{1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n} \quad \sum_{\mathrm{j}=\mathrm{k}}^{\mathrm{n}} \mathrm{r_j} \geq 1 \right\}\right\}$$

სადაც $\mathrm{I_k}$ და $\mathrm{k} \geq \mathrm{s}$ აგრეთვე $\sup\{\emptyset\} = -\infty$.

ოპტიმალური ამონაგები მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$V(n) = \prod_{j=s}^{n} q_j \sum_{j=s}^{n} r_j$$

დამტკიცება. თავიდან ვიგულისხმოთ, რომ $\mathrm{p_j} < 1$ ყველა $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots$ n-სთვის.

$\mathrm{g_j(t)}$ და $\mathrm{G_j(t)}$-თი ავღნიშნოთ შესაბამისად $\mathrm{I_j}$ და $\mathrm{S_K}$ − ს მაწარმოებელი ფუნქციები,

სადაც $\mathrm{S_K} \coloneqq \mathrm{I_k} + \mathrm{I_{k+1}} + \mathrm{I_{k+2}} + \cdots + \mathrm{I_n}$. მაშინ $\mathrm{I_k}$ − ების დამოუკიდებლობიდან გვექნება

(1) $g_t(t) = q_j + p_j t$ და

$$G_k(t) = \prod_{j=k+1}^{n} (q_j + p_j t) = \prod_{j=k+1}^{n} q_j \, (1 + r_j t)$$

$\log G_k(t)$*-ს გაწარმოებით მივიღებთ*

$$\frac{G_k{}'(t)}{G_k(t)} = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{r_j}{1 + r_j(t)}$$

ამრიგად,

(2) $$P(S_k = 1) = G_k{}'(0) = \prod_{j=k+1}^{n} q_j \sum_{j=k+1}^{n} r_j$$

ვიყენებთ იმას, რომ $\mathrm{p_j} < 1$ სადაც $\mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ რაც იწვევს $\mathrm{G_k}(0) > 0$.

ახლა შევხედოთ კლას CϵΦ, ავღნიშნოთ k-ური დალოდების დროის შემდეგ პირველ წარმატებაზე გაჩერების წესების სიმრავლე

პირველი მნიშვნელოვანი დაკვირვება არის ის, რომ თუ გამოვიყენებთ გაჩერების წეს t-ს, მაშინ ვჩერდებით ბოლო წარმატებაზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ $S_k = 1$.

ოპტიმალური მნიშვნელობა C სიმრავლეში არის $p^* = P(S_{k^*} = 1)$, სადაც k^* ახდენს (2) ფორმულის მაქსიმიზაციას.

გარდა ამისა, განმარტების თანახმად S_k არის დამოუკიდებელი $I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots I_k$-სგან. ჩვენ ვაფართოვებთ კლას C-ს C'-ით, სადაც C'-ით $C' \subset \Phi$, სადაც დავუშვებთ შემთხვევითი დალოდებით დროებს W. $\{W = k\} \in \sigma(I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots I_k)$, რომლის შედეგადაც გავჩერდებით ნებისმიერ წარმატებაზე. C'-ში ოპტიმალური გაჩერების წესს აქვს იგივე მნიშვნელობა p^*,

რადგანაც $p(S_W = 1 | \, I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots I_k, W = k) = P(S_k = 1)$ ნებისმიერი k-სთვის.

$P(S_k = 1)$ P არის ყოველთვის უნიმოდალური ფუნქცია k-სი. $k = 0, \dots, n-1$.

ამის დასანახად დავუშვათ, რომ $r_1 + r_2 + r_3 +, \dots, +r_n \geq 1$ მაშინ(2)-დან და $q_j > 0, j = 1,2, . . , n$.

გამარტივებით მივიღებთ (3)-ს

(3)

$$p(S_k = 1) < p(S_{k+1} = 1) \leftrightarrow q_{k+1} r_{k+1} < \sum_{j=k+2}^{n} r_j (1 - q_{k+1}) \leftrightarrow 1 < \sum_{j=k+2}^{n} r_j$$

(3)-ის ჯამი მარჯვენა მხარის მონოტონურად კლებადია k-ს მიმართ. k-ს ზრდასთან ერთად (3) უტოლობის მიმართულების ცვლილება კარგის მანიშნებელია, ამრიგად

$$p(S_{k^*} = 1) \geq p(S_{k^*+1} = 1) \geq \cdots \geq p(S_{n-1} = 1)$$

და შესაბამისად $p(S_{k^*} = 1) \geq p(S_W = k^*)$. ეს კი ნიშნავს რომ τ_n-ს გააჩნია ,,ერთადერთი გაჩერების კუნძული''. ეს ნიშნავს, რომ τ_n ჩერდება $k^* -$ის მერე პირველივე წარმატებაზე.

$s = k^* + 1$.

იგივე ჭეშმარიტია თუ $\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 + \mathrm{r}_3 +, \dots, +\mathrm{r}_\mathrm{n} < 1$, რადგანაც $\mathrm{k}^* = 0$. ეს ნიშნავს, რომ უკეთესია გავჩერდეთ პირველ წარმატებაზე ვიდრე დაველოდოთ შემდგომ შემთხვევას.

ამიტომაც $\tau_\mathrm{n} \in \mathrm{C}$-ს და მნიშვნელობა უდრის (4)-ს.

(4)

$$V(n) = p^* \prod\nolimits_{m=s}^{n} q_m \sum_{j=s}^{n} r_j$$

და ბოლოს ვიგულისხმოთ, რომ $\mathrm{p_j} = 1$ რომელიმე $1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{n}$. თუ $\mathrm{p_n} = 1$ მაშინ ცხადია, რომ ოპტიმალური იქნება n-ზე გაჩერება. ეს ემთხვევა s=n პასუხს, როგორც განსაზღვრულია თეორემაში, რადგანაც $\mathrm{r_n} = \infty$.

თუ $\mathrm{p_n} < 1$, j^* ავღნიშნოთ ბოლო ინდექსი $1 \leq \mathrm{j} < \mathrm{n}$ ისეთი, რომ $\mathrm{p_j} = 1$. მაშინ უტოლობა

$\mathrm{p}_{\mathrm{j}^*+1} < 1, \dots, \mathrm{p_n} < 1$. ამრიგად, ვიხილავთ პირველ შემთხვევას თუ $\mathrm{s} \geq \mathrm{s}^* + 1$. წინააღმდეგ შემთხვევაში წავაგებთ ალბათობით ერთი. თუ გავჩერდებით $\mathrm{j} < \mathrm{j}^*$. ამრიგად უნდა გავჩერდეთ $\mathrm{j}^* -$ზე. ეს ამტკიცებს თეორემის დებულებას, რომ $\mathrm{s} = \mathrm{j}^*$. ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია.■

3. შანსების ალგორითმი

შემდეგი ალგორითმი, რომელიც დაფუძნებულია შანსების თეორემაზე არის მოსახერხებელი განსაკუთრებით თუ გვინდა ვუპასუხოთ მთელ რიგ შეკითხვებს.
A1. ჩამოწერე შებრუნებული თანმიმდევრობით $q_j = 1 - p_j$,$r_j = \frac{p_j}{q_j}$ და დათვალე რეკურენტულად $Q_k \coloneqq q_n \cdot q_{n-1} \cdot \ldots \cdot q_k$ და $R_k \coloneqq r_n + r_{n-1} + \cdots + r_k$. გაჩერდი , როცა R_k გაუტოლდება ან აღემტება 1-ს და k მიაღწევს ერთს $k = 1$, რაც არ უნდა მოხდეს მანამდე.
A2. $V(n) = Q_s R_s$
გაჩერების ინდექსი s A1 -ში არის დრო, რომლის შემდეგ პირველ წარმატებაზე გაჩერებაც არის ოპტიმალური, ხოლო A2-ის შედეგი არის მნიშვნელობა ანუ იგივე ოპტიმალური მოგების ალბათობა.
R_s-ს დავუძახოთ ერთზე გაჩერებული შანსების ჯამი.

4. დასკვნა

ოპტიმალური ამონაგებისთვის სამართლიანია
(5)
$V(n) = R_{s-1} Q_{s-1} \leftrightarrow \quad R_s = 1$

დამტკიცება: შანსების თეორემიდან გვაქვს, რომ $V(n) = Q_s R_s$, აქედან გამომდინარე $V(n) = R_{s-1} Q_{s-1}$ ექვივალენტურია $q_{s-1} R_{s-1} = R_s$. ეს უკანასკნელი კი სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $q_{s-1} R_s + p_{s-1} = R_s$, ეს კი ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $R_s = 1$

5. განზოგადება

დავუშვათ გვინდა გავჩერდეთ ბოლო ι –ურ წარმატებაზე, სადაც $1 \leq \iota \leq n$ ჩნდება ორი შეკითხვა. პირველი არის თუ არა ოპტიმალური გაჩერების სტრატეგია $\iota > 1$ -სთვის იგივე ფორმის, როგორიც ι=1. მეორე, ოპტიმალური არის თუ არა შანსების აჯამვა ι -მდე, რომ ინდექსი ვიპოვოთ?

პასუხი პირველ შეკითხვაზე არის ,,დიახ''. ოპტიმალური სტრატეგია, მართლაც, იმავე ფორმისაა; ოპტიმალურია გარკვეული გაჩერების ინდექსის $s_\iota = k^*(\iota) + 1$-ის მერე გაჩერება, მაგრამ შანსების აჯამვა გვაძლევს საუკეთესო შემთხვევაში მხოლოდ მიახლოებით პასუხს.
ამის დასანახად საკმარისია განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\iota = 2$-ს.
მაწარმოებელი ფუნქციიდან (1)-დან მარტივად ვღებულობთ, რომ $p(s_k = 2) = \frac{G_k''(0)}{2}$.
იგივენაირად, (3)-დან მარტივად დავასკვნით, რომ სხვაობა $G_k''(0) - G_{k+1}''(0)$ იცვლის ნიშანს ერთხელ როცა k იზრდება. ამრიგად $p(s_k = 2)$ არის უნიმოდალური k-ს მიმართ.
შესაბამისად, შანსების თეორემის დამტკიცება ნარჩუნდება $\iota = 2$-სთვის და ოპტიმალურ წესს აქვს იგივე სახე. თუმცა, ოპტიმალური $s \coloneqq s_2$ აქვს უფრო რთული სახე. კერძოდ,
(6)
$$s_2 = sup\left\{1,\ \ sup\left\{1 \le k \le n-1:\ \ R_k - R_k^{(2)}/(R_k) \ge 2\right\}\right\}$$
სადაც $R_k^{(2)}$ აღნიშნავს შესაბამის შანსების კვადრატების ჯამს და აუცილებელი გათვლების რაოდენობა იზრდება ι-თან ერთად.

6. გამოყენებები

მოცემული სექცია გვაძლევს ამოცანების ჩამონათვალს, სადაც შეგვიძლია გამოვიყენოთ შანსების ალგორითმი.

ფსონის დადების ამოცანა- კაზინო გვთავაზობს თამაშს, რომელიც შედგება კამათლის n-ჯერ გაგორებისგან. პირველ გაგორებაზე ვისვრით n-ცალ კამათელს, მეორე გაგორებაზე n-1-ს, ... , ბოლო გაგორებაზე ერთ ცალ კამათელს ვაგორებთ. ვიღებთ ამონაგებ β_n-ს. იმ შემთხვევაში თუ მიმდევრობაში გამოჩნდება 6-იანი და თუ ამავდროულად ჩვენ სწორად გამოვიცდნობთ 6-იანისმოსვლის ბოლო დროს, რა არის თითოეული n-სათვის E_n სამართლიანი ფსონი?

გამოვიყენოთ A_1, A_2, q_j და r_j შებრუნებული თანმიმდევრობებით. გვექნება $\frac{5}{6}$, $\left(\frac{5}{6}\right)^2$, $\left(\frac{5}{6}\right)^3$, ... და $\frac{1}{5}$, $\frac{11}{25}$, $\frac{91}{125}$... შესაბამისად, $R_n = \frac{1}{5}$, $R_{n-1} = \frac{16}{25}$, $R_{n-2} = \frac{171}{125} > 1$ და აქ გავჩერდებით. ეს გვაძლევს $E_1 = \frac{\beta_1}{6}$, $E_2 = \frac{10\beta_2}{27}$, $E_3 = \beta_3 \left(\frac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{171}{125}\right) = 0.458 \ldots \cdot \beta_3$

ოპტიმალურია გავჩერდეთ პირველ შემთხვევაზე ბოლო სამ გაგორებაში. $n \geq 3$-სთვის ოპტიმალური ამონაგები ტოლია $0.458 \ldots \cdot \beta_3$ − ის და შეგვიძლია გამოვიყენოთ ეს ფაქტი, თუ კაზინო შემოგვთავაზებს სხვა β_n-ს, სადაც $n \geq 3$.

7. $\mathbf{V(n)}$ − ის ტიპიური ქვედა საზღვარი

თეორემა 2

თუ $R_n \sum_{j=s}^{n} r_j = R$, მაშინ $V(n) = \sum_{j=s}^{n} r_j \prod_{j=s}^{n} q_j > Re^{-R}$ (i)

თუ $R_{s(n)} \to 1$, ${R_{s(n)}}^{(2)} \to 0$, როცა $n \to \infty$ მაშინ $V(n) \to \frac{1}{e}$. (ii)

დამტკიცება: (i) $R = \sum_{j=s}^{n} r_j = \sum_{j=s}^{n} (1/q_j - 1)$, აქედან გამომდინარე $\sum_{j=s}^{n} 1/q_j = R + (n-s) + 1$. ჩავსვათ $m = n - s + 1$. საშუალო გეომეტრიულისა და არითმეტიკული საშუალოს თვისებების თანახმად გვექნება,

$$\sqrt[m]{\prod_{j=s}^{n} \frac{1}{q_j}} = \sqrt[m]{1/\prod_{j=s}^{n} q_j} \leq \frac{R+m}{m} = 1 + \frac{R}{m}$$

და $\prod_{j=s}^{n} q_j \geq (1 + \frac{R}{m})^{-m}$. $(1 + \frac{R}{m})^{-m} \downarrow e^{-R}$. (9)

(ii) $R_{s(n)}^2 = \sum_{k=s}^{n} r_k^2$. გვექნება

$$Q_{s(n)}^{-1} = \prod_{k=s(n)}^{n} \frac{1}{q_k} = \prod_{k=s(n)}^{n} (1 + r_k)$$

გალოგარითმების შედეგად $\log(1 + r_k) \geq r_k - r_k^2$ მივიღებთ

(10) $$-\log(Q_{s(n)}) = \sum_{k=s(n)}^{n} \log(1 + r_k) \geq R_{s(n)} - R_{s(n)}^{(2)}$$

აქედან გამომდინარე, (10)-დან $Q_{s(n)} \leq \exp(-R_{s(n)} + R_{s(n)}^{(2)}) \to \frac{1}{e}$.

(8)-სთან ერთად კი $Q_{s(n)} \to \frac{1}{e}$ და $V(n) = Q_{s(n)} R_{s(n)} \to \frac{1}{e}$

ანუ თუ დაკვირვებების რაოდენობა უსასრულოდ იზრდება მაშინ $V(n)$ შემოსაზღვრულია ქვემოდან $\frac{1}{e}$ − ით. ■

ლიტერატურა

Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. Wiley, New York.
Bruss, F. T. (1984a). Patterns of relative maxima in random permutations. *Ann. Soci´et´e Scient.*
Bruxelles 98 19–28.
Bruss, F. T. (1984b). A unifiedapproac h to a class of best choice problems with an unknown number of options. *Ann. Probab*. 12 882–889.
Chow, Y. S. Robbins, H. and Siegmund, D. (1971). *The Theory of Optimal Stopping*. Houghton Mifflin, Boston.
Dynkin, E. B. and Juschkewitsch, A. A. (1969). *Markoffsche Prozesse*. Springer, Berlin.
Gianini, J. and Samuels, S. M. (1976). The infinite secretary problem. *Ann. Probab*. 4 418–432.
Grey, D. (1999). Private communication.
Hill, T. P. and Kennedy, D. P. (1992). Sharp inequalities for optimal stopping with rewards based
on ranks. *Ann Appl. Probab*. 2 503–517.
Hill T. P. and Krengel, U. (1992). A prophet inequality relatedto the secretary problem. *Contemp.*
Math. 125 209–215.
Hsiau, S. R. and Yang, J. R. (2000). A natural variation of the standard secretary problem. *Statist.*
Sinica 10. To appear.
Pfeifer, D. (1989). Extremal processes, secretary problems andthe $1/e$-law. *J. Appl. Probab*. 26
722–733.
Rocha, A. L. (1993). The infinite secretary problem with recall. *Ann. Probab*. 21 898–916.
Samuel-Cahn, E. (1995). The best-choice secretary problem with random freeze on jobs. *Stochatstic*
Process Appl. 55 315–327.
Samuels, S. M. (1993). Secretary problems as a source of benchmark bounds. In *Stochastic Inequalities*
(M. ShakedandY . L. Tong, eds.) 371–387. IMS, Hayward, CA.
Shiryayev, A. N. (1978). *Optimal Stopping Rules*. Springer, New York.
Tamaki, M. (1999). Private communication.