ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნათია ხაჩიძე

მეორე რიგის არაწრფივი სხვაობიანი განტოლებების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ

მათემატიკის დეპარტამენტი

კოლოქვიუმი 2

ხელმძღვანელი: **რომან კოპლატაძე**, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2020

ს ა რ ჩ ე ვ ი

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია საკმარისად ზოგადი სახის მეორე რიგის არაწრფივი სხვაობიანი განტოლება.

$$\Delta^2 u(k) + F(u)(k) = 0,$$

სადაც $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$, $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, $F\colon l(\mathbb{N}) \to l(\mathbb{N})$ და $F \in V(\tau)$. $l(\mathbb{N})$ აღნიშნავს $\mathbb{N}$-ზე განსაზღვრულ ფუნქციათა სიმრავლეს. ვთქვათ $\tau\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ისეთი, რომ $\lim\limits_{k\to+\infty} \tau(k) = +\infty$. $V(\tau)$ აღნიშნულია ყველა ოპერატორთა $F\colon l(\mathbb{N}) \to l(\mathbb{N})$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს: $F(x)(k) = F(y)(k)$ ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$ და $x, y \in l(\mathbb{N})$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას, $x(s) = y(s)$ როცა $s \in \mathbb{N}_{\tau(k)}$ ($\mathbb{N}_m = \{m, m+1, m+2, \dots\}$).

ნაშრომში მოყვანილია საკმაოდ ზოგადი საკმარისი პირობები, იმისთვის, რომ მოცემული განტოლების ყოველი წესიერი ამონახსნი იყოს რხევადი.

1. შესავალი

ვთქვათ $k \in \mathbb{N}$, შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\mathbb{N}_k = \{k, k+1, k+2, \dots\}$, ვთქვათ $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ისეთი, რომ $\lim\limits_{k \to +\infty} \tau(k) = +\infty$. $V(\tau)$ აღნიშნულია ყველა ოპერატორთა $F: l(\mathbb{N}) \to l(\mathbb{N})$ ($l(\mathbb{N})$ აღნიშნავს $\mathbb{N}$-ზე განსაზღვრულ ფუნქციათა სიმრავლეს), რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$F(x)(k) = F(y)(k)$ ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$ და $x, y \in l(\mathbb{N})$, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას, $x(s) = y(s)$ როცა $s \in \mathbb{N}_{\tau(k)}$.

მოცემულ შრომაში შევისწავლით შემდეგი სხვაობიანი განტოლების

$$\Delta^2 u(k) + F(u)(k) = 0, \tag{1.1}$$

ამონახსნების ასიმპტოტურ ყოფაქცევას, სადაც $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$, $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, $F: l(\mathbb{N}) \to l(\mathbb{N})$ და $F \in V(\tau)$.

ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის აღვნიშნოთ $H_{k_0,\tau}$, ყველა იმ u ფუნქციათა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $u(k) > 0$ ან $u(k) < 0$, როცა $k \in N_{k_*}$, სადაც $k_* = \min\{k_0, \tau(k_0)\}$. შრომაში ყველგან იგულისხმება, რომ

$$F(u)(k)u(k) \geq 0, \qquad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}, u \in H_{k_0,\tau}. \tag{1.2}$$

ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$, $u: \mathbb{N}_{k_0} \to \mathbb{R}$ ფუნქციას ეწოდება (1.1) განტოლების წესიერი ამონახსნი, თუ

$$\sup\{|u(i)|: i \geq k\} > 0\,, \qquad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}$$

და არსებობს $u^*: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ისეთი, რომ $u^* \equiv u$ $\mathbb{N}_{k_0}$-ზე, და

$$\Delta^2 u^*(k) + F(u^*)(k) = 0, \qquad \text{როცა } k \in \mathbb{N}_{k_0}.$$

განმარტება 1.1. (1.1) განტოლების წესიერ ამონასნს $u: \mathbb{N}_{k_0} \to \mathbb{R}$ ეწოდება რხევადი, თუ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის მოიძებნება $k_1, k_2 \in \mathbb{N}_{k_0}$, ისეთი, რომ $u(k_1)u(k_2) \leq 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მას ეწოდება არარხევადი.

განმარტება 1.2. ვიტყვით, რომ (1.1) განტოლება რხევადია, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

წრფივი გადახრილ არგუმენტებიანი მეორე რიგის სხვაობიანი განტოლებებისთვის ამონახსნების რხევადობის საკითხი უკვე შესწავლილი იყო [1-3]. ანალოგიური

ამოცანები მაღალი რიგის თითქმის წრფივი ფუნქციონალურ დიფერენციალური განტოლებებისთვის საკმარისად კარგად არის შესწავლილი შემდეგ შრომებში [4-6].

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$|F(u)(k)| \geq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{\tau_i(k)} |u(s)|^{\mu_i(s)} \Delta_s r_i(s,k) \right), \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}, u \in H_{k_0,\tau}, \tag{1.3}$$

სადაც $\sigma_i; \tau_i: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\mu_i: \mathbb{N} \to (0, +\infty)$, $\sigma_i(k) \leq k$, $\sigma_i(k) \leq \tau_i(k)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \sigma_i(k) = +\infty$, $r_i(\cdot\,, k)$ არაკლებადია, $r_i: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(\mathrm{i} = 1, \dots, m)$.

შრომაში მოყვანილია (1.1) განტოლების წესიერი ამონახსნის რხევადობის საკმარისი პირობები, როდესაც $F \in V(\tau)$ და აკმაყოფილებს (1.3) უტოლობას.

2. დ ა მ ხ მ ა რ ე ლ ე მ ე ბ ი

პირველ რიგში დამხმარე ლემების სახით ჩამოვაყალიბოთ ნაწილობითი ჯამის ფორმულა (აბელის გარდაქმნა) რომელსაც ქვემოთ გამოვიყენებთ.

ლემა 2.1. ავიღოთ $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ ნამდვილი სასრული მიმდევრობები და $A_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$. მაშინ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = A_n b_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

ლემა 2.2. ავიღოთ $\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $\{b_i\}_{i=1}^{+\infty}$ უსასრულო მიმდევრობები, ვთქვათ მწკრივი $\sum_{i=1}^{+\infty} b_i$ კრებადია, ხოლო $a_i B_{i+1} \to 0$, როცა $i \to +\infty$, სადაც $B_i = \sum_{j=i}^{+\infty} b_j$. მაშინ $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i$ და $\sum_{i=2}^{+\infty} (a_i - a_{i-1}) B_i$ მწკრივებიდან ერთერთის კრებადობიდან გამომდინარეობს მეორეს კრებადობა და

$$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i = a_1 B_1 + \sum_{i=2}^{+\infty} (a_i - a_{i-1}) B_i.$$

ლემა 2.3. ავიღოთ $\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$, $\{b_i\}_{i=1}^{+\infty}$ ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობები, ვთქვათ $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i b_i$ კრებადია, $A_{k_0,n} b_n \to 0$, როცა $n \to +\infty$, $b_n \to 0$, როცა $n \to +\infty$. მაშინ ნებისმიერი $k_0 \in \mathbb{N}$ სამართლიანია ტოლობა

$$\sum_{i=k}^{+\infty} a_i b_i = \sum_{i=k}^{+\infty} A_{k_0,i} (b_i - b_{i+1}) - b_k A_{k_0,k-1}, \qquad k \geq k_0 + 1,$$

სადაც $A_{k_0,i} = \sum_{j=k_0}^{i} a_j$.

ლემა 2.4. ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$, $u \colon \mathbb{N}_{k_0} \to (0, +\infty)$, და

$$\Delta^2 u(i) \leq 0, \qquad i \in \mathbb{N}_{k_0},$$

$$\sup\{|\Delta^2 u(i)| \colon i \geq k\} > 0, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0} \tag{2.4.1}$$

მაშინ

$$\Delta u(k) > 0, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}. \tag{2.4.2}$$

დამტკიცება: რადგან $u \colon \mathbb{N}_{k_0} \to (0, +\infty)$, ამიტომ (2.4.1) -ის პირველი პირობის თანახმად

$$\Delta u(k) \geq 0, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}, \tag{2.4.3}$$

მართლაც, ვთქვათ არსებობს $k_1 \in \mathbb{N}_{k_0}$ ისეთი, რომ $\Delta u(k_1) < 0$, მაშინ (2.4.1) -ის პირველი პირობის თანახმად $\Delta u(k)$ კლებადია, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$ და

$$\begin{gathered} \Delta u(k+1) \leq \Delta u(k) \\ \Delta u(k) = c < 0, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_1}, \end{gathered} \tag{2.4.4}$$

ამიტომ გვექნება

$$u(k) = u(k_1) + \sum_{i=k_1}^{k-1} \Delta u(i) \leq u(k_1) + c(k - k_1), \tag{2.4.5}$$

ამიტომ საკმარისად დიდი k-ს შემთხვევაში გვაქვს $u(k) < 0$ რაც ეწინააღმდეგება საწყის პირობას, მაშასადამე გვაქვს (2.4.3), აქედან (2.4.1)-ის მეორე პირობით გვაქვს

$$\Delta u(k) \geq -\sum_{i=k}^{+\infty} \Delta^2 u(i) = \sum_{i=k}^{+\infty} |\Delta^2 u(i)| > 0, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}, \tag{2.4.6}$$

მაშასადამე სრულდება პირობა (2.4.2). ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.5. ვთქვათ შესრულებულია ლემა 2.4-ის პირობები და

$$\sum_{i=k_0}^{+\infty} i|\Delta^2 u(i)| = +\infty, \tag{2.5.1}$$

მაშინ

$$u(k) \uparrow +\infty, \qquad \frac{u(k)}{k} \downarrow. \tag{2.5.2}$$

დამტკიცება: 2.4 ლემის თანახმად $\Delta u(k) > 0$ სადაც $k \in \mathbb{N}_{k_0}$, ამიტომ (2.4.6)-ში იმის გათვალისწინებით, რომ $\Delta u(k) = u(k+1) - u(k)$ და რეკურსიულად გაშლით გვექნება

$$u(k) \geq \sum_{l=k_0}^{k-1} \sum_{i=l}^{+\infty} |\Delta^2 u(i)|, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}, \tag{2.5.3}$$

ამრიგად ლემა 2.1-ის თანახმად, თუ ავიღებთ $a_i \coloneqq 1$, $b_i \coloneqq \sum_{j=i}^{+\infty} |\Delta^2 u(i)|$ გვექნება

$$u(k) \geq \sum_{j=k_0}^{k-1} 1 \sum_{i=k-1}^{+\infty} |\Delta^2 u(i)| + \sum_{i=k_0}^{k-2} \sum_{j=k_0}^{i} 1\, |\Delta^2 u(i)| =$$

$$= (k - k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} |\Delta^2 u(i)| \quad \sum_{i=k_0}^{k-2} (i - k_0 + 1) \left|\Delta^{(2)} u(i)\right|, \tag{2.5.4}$$

$$k \in \mathbb{N}_{k_0},$$

(2.5.1) პირობის თანახმად

$$\sum_{i=k_0}^{k-2} (i - k_0 + 1) |\Delta^2 u(i)| \to +\infty, \qquad k \to +\infty, \tag{2.5.5}$$

ამიტომ (2.5.4)-ის თანახმად გვაქვს $u(k) \to +\infty$, როცა $k \to +\infty$. მეორე მხრივ, რადგან $\Delta u(k) > 0$, $u(k)$ ზრდადია ამიტომ სრულდება (2.5.2)-ის პირველი პირობა. განვიხილოთ ტოლობა

$$\sum_{s=k_0}^{k} s\Delta^{(2)} u(s) - k_0 \Delta^2 u(k_0) =$$

$$= \sum_{i=k_0}^{k} s(\Delta u(s+1) - \Delta u(s)) - k_0 \Delta^2 u(k_0) =$$

$$= k_0 \Delta u(k_0 + 1) - k_0 \Delta u(k_0) + \sum_{i=k_0+1}^{k} s\big(\Delta u(s+1) - \Delta u(s)\big) - $$
$$- k_0 \Delta^2 u(k_0).$$

$$\sum_{s=k_0}^{k} s\Delta^{(2)} u(s) - k_0 \Delta^2 u(k_0) = \tag{2.5.6}$$

$$= k_0 \Delta u(k_0 + 1) - k_0 \Delta u(k_0) + \sum_{i=k_0+1}^{k+1} s\big(\Delta u(s+1) - \Delta u(s)\big)$$
$$- (k+1)\Delta u(k+2) + (k+1)\Delta u(k+1)$$
$$- k_0 \Delta^{(2)} u(k_0)$$

ამ უკანასკნელში თუ გავშლით ჯამს და ჩავატარებთ შესაბამის მოქმედებებს მივიღებთ

$$\sum_{s=k_0}^{k} s\Delta^{(2)}u(s) - k_0\Delta^2 u(k_0) =$$

$$= k\Delta u(k+1) - u(k+1) + C$$

სადაც $C = u(k_0+1) - k_0\Delta u(k_0+1)$

(2.5.1) პირობის თანახმად

$$k\Delta u(k+1) - u(k+1) \to +\infty$$

ამიტომ

$$u(k) - k\Delta u(k) \to +\infty, \qquad k \to +\infty \tag{2.5.7}$$

რადგან

$$\Delta\left(\frac{u(k)}{k}\right) = \frac{u(k+1)}{k+1} - \frac{u(k)}{k} = \frac{k\big(u(k+1)-u(k)\big)-u(k)}{k(k+1)} = \\ = \frac{k\Delta u(k) - u(k)}{k(k+1)}. \tag{2.5.8}$$

ამიტომ (2.5.7)-ის ძალით $\frac{u(k)}{k} \downarrow$, ანუ (2.5.2)-ის მეორე პირობა სამართლიანია.

ლემა 2.6. ვთქვათ $\varphi, \psi: \mathbb{N}_{k_0} \to (0,+\infty)$, $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to+\infty} inf \varphi(k) = 0, \qquad \psi \uparrow +\infty, \text{როცა } k \to +\infty, \tag{2.6.1}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \tilde{\varphi}(k)\psi(k) = +\infty, \tag{2.6.2}$$

სადაც

$$\tilde{\varphi}(k) = \min\{\varphi(s): s \le k, s \in \mathbb{N}_{k_0}\} \tag{2.6.3}$$

მაშინ არსებობს ზრდადი მიმდევრობა $\{k_i\}_{i=1}^{+\infty}$, ისეთი, რომ $\lim\limits_{i\to+\infty} k_i = +\infty$,

$$\tilde{\varphi}(k_i) = \varphi(k_i), \qquad \tilde{\varphi}(k_i)\psi(k_i) \le \tilde{\varphi}(s)\psi(s), \quad s \in \mathbb{N}_k, \\ i = 1,2,\ldots$$

დამტკიცება: განვსაზღვროთ სიმრავლეები $E_i \subset \mathbb{N}_{k_0}$, $(i = 1,2)$ შემდეგნაირად:

$$k \in E_1 \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(k) = \varphi(k),$$
$$k \in E_2 \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(s)\psi(s) \geq \tilde{\varphi}(k)\psi(k), \qquad s \in \mathbb{N}_k.$$

(2.6.1) და (2.6.2)-დან ცხადია $sup\, E_i = +\infty, (i = 1,2)$. ვაჩვენოთ

$$\sup E_1 \cap E_2 = +\infty. \tag{2.6.4}$$

ვთქვათ $k_1 \in E_2$ და $k_1 \notin E_1$. (2.6.3)-დან გამომდინარე, არსებობს $k_2 \in [k_0, k_1)$, რომ $\tilde{\varphi}(k) = \tilde{\varphi}(k_2)$ $k = k_2, k_2 + 1, k_2 + 2, \dots, k_1$ და $\tilde{\varphi}(k_2) = \varphi(k_2)$. შესაბამისად, რადგან ψ ზრდადია და $k_1 \in E_2$, გვაქვს

$$\tilde{\varphi}(s)\psi(s) \geq \tilde{\varphi}(k_2)\psi(k_2), \qquad s \in \mathbb{N}_{k_2}$$

გვაქვს $k_2 \in E_1 \cap E_2$. გამოვიყენებთ ზემოთ მოცემულ მსჯელობას $k_2 < k_3 \in E_2, k_3 \notin E_1$ და მივიღებთ $k_4 \in E_1 \cap E_2$, იმის გათვალისწინებით, რომ $sup\, E_i = +\infty, (i = 1,2)$, მივიღებთ რომ (2.6.4) ჭეშმარიტია. შესაბამისად ლემა დამტკიცებულია.

აღნიშვნები 2.7. ქვემოთ ყველგან ვისარგებლებთ შემდეგი აღნიშვნებით:

$$h_{1\varepsilon}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda = 0, \\ \varepsilon, & \lambda \in (0,1], \end{cases} \quad h_{2\varepsilon} = \begin{cases} 0, & \lambda = 1, \\ \varepsilon, & \lambda \in [0,1), \end{cases}$$
$$h_\varepsilon(\lambda) = h_{1\varepsilon} + h_{2\varepsilon} \tag{2.7}$$

3. დადებითი ამონახსნის არსებობის აუცილებელი პირობები

ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობა. ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$

$$|F(u)(k)| \geq \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{\tau_i(k)} |u(s)|^{\mu_i(s)} \Delta_s r_i(s,k)\right), \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0}, u \in H_{k_0,\tau}, \tag{3.1}$$

სადაც

$$\begin{aligned}&\sigma_i;\tau_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \mu_i\colon \mathbb{N} \to (0,+\infty),\ \sigma_i(k) \leq k,\ \sigma_i(k) \leq \tau_i(k),\ \lim_{k\to+\infty} \sigma_i(k) = +\infty,\\ &r_i(\cdot,k) \text{ არაკლებადია}, \Gamma_i\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R}\ (\mathrm{i} = 1,\dots,m).\end{aligned} \tag{3.2}$$

ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$. U_{k_0}-ით აღვნიშნოთ (1.1) განტოლების ყველა იმ ამონახსნთა სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობას $u(k) > 0$, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}$.

თეორემა 3.1. ვთქვათ რომელიმე $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის სრულდება (3.1), (3.2),

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(k)}^{\tau_j(k)} s^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,k)\right) = +\infty, \tag{3.3}$$

და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_i(k)}^{\tau_i(k)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_i(s,k)\right) = +\infty, \tag{3.4}$$

პირობები. გარდა ამისა თუ $U_{k_0} \neq \emptyset$, მაშინ

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \sup\left(\lim_{k\to+\infty} \inf(k - k_0) k^{-\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s r_j(s,l)\right)\right) \leq 1. \tag{3.4’}$$

დამტკიცება: დავუშვათ არსებობს $k_0 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ $U_{k_0} \neq \emptyset$. U_{k_0} სიმრავლის განმარტების თანახმად (1.1) განტოლებას გააჩნია $u\colon \mathbb{N}_{k_0} \to (0,+\infty)$ წესიერი ამონახსნი. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $k_1 \in \mathbb{N}_{k_0}$, ისეთი, რომ

$$u(k) \geq (k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right), \quad k \in \mathbb{N}_{k_1}, \tag{3.5}$$

ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ

$$u\big(\sigma_i(k)\big) \geq C > 0, \qquad (i = 1, .., m), \qquad k \in \mathbb{N}_{k_1}. \tag{3.6}$$

რეკურსიული გაშლის გამოყენებით (1.1) განტოლებიდან გვაქვს

$$\Delta u(k) \geq \sum_{i=k}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,i) \right) \tag{3.7}$$

საიდანაც ლემა 2.1 ის გამოყენებით

$$\begin{aligned} u(k) &\geq \sum_{l=k_0}^{k-1} \sum_{i=l}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,i) \right) = \\ &= (k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,i) \right) + \\ &+ \sum_{i=k_0}^{k-2} (i-k_0+1) \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,i) \right), \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0+2}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

მეორე მხრივ, თუ ვისარგებლებთ 2.3 ლემით, მივიღებთ,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=k-1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,i) \right) = \\ &= \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{m} \left(i \sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,i) \right) = \\ &= \sum_{i=k-1}^{+\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \sum_{l=k_0}^{i} \sum_{j=1}^{m} \left(l \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right) - \\ &- \frac{1}{k-1} \sum_{i=k_0}^{k-2} \sum_{j=1}^{m} \left(i \sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,i) \right), \qquad k \in \mathbb{N}_{k_0+2}. \end{aligned}$$

უკანასკნელი უტოლობის გათვალისწინებით (3.8)-დან გვექნება

$$u(k) \geq (k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{i(i+1)}\right)\sum_{l=k_0}^{i}\sum_{j=1}^{m}\left(l\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,l)\right)-$$
$$-\sum_{i=k_0}^{k-2}\left(\frac{(k-k_0)i}{k-1}-(i-k_0+1)\right)\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,i)\right)=$$
$$=(k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{i(i+1)}\right)\sum_{l=k_0}^{i}\sum_{j=1}^{m}\left(l\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,l)\right)$$
$$-\sum_{i=k_0}^{k-2}\frac{(k_0-1)(k-i-1)}{k-1}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,i)\right)\geq \tag{3.9}$$
$$\geq (k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{i(i+1)}\right)\sum_{l=k_0}^{i}\sum_{j=1}^{m}\left(l\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,l)\right)-$$
$$-(k_0-1)\sum_{i=k_0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,i)\right)\geq$$

$$\geq (k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{i(i+1)}\right)\sum_{l=k_0}^{i}l\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,l)\right)-$$
$$-(k_0-1)\Delta u(k_0), \qquad k\in\mathbb{N}_{k_0+2}.$$

რადგან $u(k)\uparrow+\infty$, როცა $k\to+\infty$, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $|u(s)|^{\mu_i(s)}\geq 1$, როცა $s\geq\sigma_j(i)$, ამიტომ (3.4)-ის თანახმად შევარჩიოთ $k_1\in\mathbb{N}_{k_0}$ ისე, რომ სრულდება

$$\sum_{l=k_0}^{k_1-1}l\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,l)\right)\geq 2(k_0-1)\Delta u(k_0), \tag{3.10}$$

(3.9)-დან გვექნება

$$u(k)\geq (k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{i(i+1)}\right)\sum_{l=k_0}^{k_1-1}l\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,l)\right)+$$
$$+(k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{i(i+1)}\right)\sum_{l=k_1}^{i}l\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,l)\right)- \tag{3.11}$$
$$-(k_0-1)\Delta u(k_0), \qquad k\in\mathbb{N}_{k_1}$$

ამიტომ (3.10) და (3.11)-ის თანახმად გვაქვს

$$u(k) \geq 2(k-k_0)(k_0-1)\Delta u(k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\frac{1}{i(i+1)} - (k_0-1)\Delta u(k_0) +$$

$$+(k-k_0)\sum_{i=k-1}^{+\infty}\left(\frac{1}{i(i+1)}\right)\sum_{l=k_1}^{i} l\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}|u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,l)\right),$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$,

რადგან $\sum_{i=k-1}^{+\infty}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{k-1}$ ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ სრულდება (3.5) უტოლობა.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $u(k) \to +\infty$, როცა $k \to +\infty$, მაშინ (3.4)-ის თანახმად (1.1)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k|\Delta^2 u(k)| = +\infty,$$

ამიტომ ლემა 2.5-ის თანახმად სრულდება

$$u(k) \uparrow +\infty, \qquad \frac{u(k)}{k} \downarrow .$$

ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია $\frac{u(k)}{k} \downarrow 0$, როცა $k \to +\infty$. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოიძებნება $c > 0$ და $k_* \in \mathbb{N}_{k_1}$ ისეთი, რომ $u(k) \geq ck$, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_*}$, ამიტომ (1.1)-დან გვაქვს

$$-\Delta^2 u(k) \geq \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(k)}^{\tau_j(k)} c^{\mu_j(s)} s^{\mu_j(s)}\Delta_s r_j(s,k)\right),$$

საიდანაც რეკურსიული გაშლით მივიღებთ

$$\Delta u(k) \geq \sum_{i=k_0}^{k}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(k)}^{\tau_j(k)} c^{\mu_j(s)} s^{\mu_j(s)}\Delta_s r_i(s,i)\right),$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to +\infty$

$$\sum_{i=k_0}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(k)}^{\tau_j(k)} s^{\mu_j(s)}\Delta_s r_i(s,i)\right)\le \lim_{k\to+\infty}\Delta u(k)<+\infty,$$

რაც ეწინააღმდეგება (3.3) პირობას, მაშასადამე

$$u(k)\uparrow+\infty,\qquad \frac{u(k)}{k}\downarrow 0,\qquad \text{როცა } k\to+\infty. \tag{3.12}$$

ვთქვათ $k_1\in\mathbb{N}$, Λ_k-ით აღვნიშნოთ იმ $\lambda\in[0,1]$ სიმრავლე, რომლებისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობა

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{u(k)}{k^{\lambda}}=0.$$

(3.12)-ის მეორე პირობის თანახმად $\Lambda_k\neq\emptyset$ და $\lambda_0\in[0,1]$, სადაც $\lambda_0=\inf\Lambda_k$. ამრიგად გვაქვს $\Lambda_k\subset[0,1]$ და საკმარისად მცირე $\varepsilon>0$-თვის

$$\lim_{k\to+\infty}\inf\frac{u(k)}{k^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}=0\ \text{ და }\lim_{k\to+\infty}\inf\frac{u(k)}{k^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}}=+\infty, \tag{3.13}$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$\varphi(k)=\left(\frac{u(k)}{k^{\lambda_0+h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(k)} \tag{3.14}$$

და

$$\tilde{\varphi}(k)=\min\{\varphi(s):k_1\le s\le k\} \tag{3.15}$$

სადაც $\mu(k)=\min\{1;\mu_i(s):i=1,\dots m\}$. (3.12)-ის მეორე პირობის თანახმად

$$\lim_{k\to+\infty}\tilde{\varphi}(k)=0. \tag{3.16}$$

ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{k\to+\infty}k^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\tilde{\varphi}(k)=+\infty. \tag{3.17}$$

მართლაც ნებისმიერი $k > k_1$, არსებობს $s_k \in [k_1, k]$ ისეთი, რომ $s_k \to +\infty$, როცა $k \to +\infty$ და

$$\tilde{\varphi}(k) = \left(\frac{u(s_k)}{{s_k}^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(s_k)},$$

ამ ტოლობიდან, რადგან $\tilde{\varphi}(k) \downarrow 0$, როცა $k \to +\infty$, (3.13)-ის მეორე პირობის ძალით გვაქვს

$$k^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\tilde{\varphi}(k) \geq {s_k}^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \frac{u(s_k)}{{s_k}^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = \frac{u(s_k)}{{s_k}^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} = +\infty,$$

რაც ამტკიცებს (3.17)-ის სამართლიანობას.

(3.5)-დან მივიღებთ

$$u(k) \geq (k - k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} \left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu_j(s)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right), \quad (3.18)$$

(3.13)-ის მეორე პირობის ძალით, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\frac{u(s)}{s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} \geq 1$, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$, ამიტომ (3.18)-დან გვექნება

$$\begin{aligned} u(k) &\geq (k - k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} \left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(s)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right) = \\ &= (k - k_0) \\ &\cdot \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} \left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(s)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.19)-დან თუ გავითვალისწინებთ (3.14) და (3.15), მივიღებთ

$$u(k) \geq (k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} \tilde{\varphi}(s)^{\mu(s)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right), \tag{3.20}$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\tilde{\tau}_i(k) = \min\{k, \tau_i(k)\}. \tag{3.21}$$

მაშინ (3.20)-დან, რადგან $\tilde{\varphi}(k) \downarrow 0$, როცა $k \to +\infty$, გვაქვს

$$u(k) \geq (k-k_0) \sum_{i=k-1}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \tilde{\varphi}\left(\tilde{\tau}_j(l)\right) \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right),$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$.

რადგან $\hat{\tau}_j(k) \leq k$ და $\tilde{\varphi}(k) \downarrow 0$, როცა $k \to +\infty$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან გვექნება

$$u(k) \geq (k-k_0) \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{i(i+1)} \tilde{\varphi}(i) \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right), \tag{3.22}$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$.

(3.13) - (3.15), (3.17) თანახმად სრულდება ლემა 2.6-ის ყველა პირობა, სადაც

$$\varphi(k) = \left(\frac{u(k)}{k^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} \right)^{\mu(k)}, \qquad \psi(k) = k^{h_\varepsilon(\lambda_0)}. \tag{*}$$

ამიტომ ლემის მიხედვით არსებობს $\{k_i\}_{i=2}^{+\infty}$ წერტილთა ისეთი ზრდადი მიმდევრობა, რომ

$$\tilde{\varphi}(k_i) = \left(\frac{u(k_i)}{k_i^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} \right)^{\mu(k_i)}, \qquad \tilde{\varphi}(s) s^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \geq \tilde{\varphi}(k_i) k_i^{h_\varepsilon(\lambda_0)},$$

როცა $s \in \mathbb{N}_{k_i}$, $i = 2,3, \dots$.

ამიტომ (3.22)-დან გვაქვს

$$u(k_i) \geq (k_i - k_0)\tilde{\varphi}(k_i){k_i}^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \sum_{n=k_i}^{+\infty} \frac{n^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{n(n+1)} \sum_{l=k_1}^{n} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right),$$

აქედან (*) გათვალისწინებით გვექნება

$$u(k_i) \geq (k_i - k_0)\left(\frac{u(k_i)}{k_i^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(k_i)} {k_i}^{h_\varepsilon(\lambda_0)}$$
$$\cdot \sum_{n=k_i}^{+\infty} \frac{n^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{n(n+1)} \sum_{l=k_1}^{n} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right)$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$\left(\frac{u(k_i)}{k_i^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{1-\mu(k_i)} \geq \frac{(k_i - k_0){k_i}^{h_\varepsilon(\lambda_0)}}{k_i^{\lambda_0 + h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}$$
$$\cdot \sum_{n=k_i}^{+\infty} \frac{n^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{n(n+1)} \sum_{l=k_1}^{n} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right)$$

აქედან გამომდინარე (*)-ის თანახმად, რადგან $\tilde{\varphi}(k) \downarrow 0$, როცა $k \to +\infty$ და $\mu(k_i) \leq 1$ მივიღებთ

$$\lim_{i \to +\infty} \sup \left((k_i - k_0) k_i^{-\lambda_0 + h_{2\varepsilon}(\lambda_0)} \sum_{n=k_i}^{+\infty} \frac{n^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{n(n+1)} \sum_{l=k_1}^{n} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)} \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot\, s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)} \Delta_s r_j(s,l) \right) \right) \leq 1$$

მაშასადამე

$$\lim_{k\to+\infty}\inf\left((k-k_0)k^{-\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{i^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}}{i(i+1)}\sum_{l=k_1}^{i} l\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\mu_j(s)}\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\, s^{h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(s)}\Delta_s r_j(s,l)\right)\right)\leq 1$$

მაშასადამე შესრულებულია (3.4) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

შედეგი 3.1 თეორემის დასამტკიცებლად დაგვჭირდება შემდეგი დამხმარე ლემები

ლემა 3.1. ვთქვათ $\tau_i: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to+\infty}\tau_i(k)=+\infty, (i=1,\dots,m), \tag{3.23}$$

მაშინ არსებობს არაკლებადი ფუნქცია $\sigma: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ისეთი, რომ

$$\begin{aligned}&1)\ \lim_{k\to+\infty}\sigma(k)=+\infty,\\ &2)\ \sigma(k)\leq\min\{k,\tau_i(k): i=1,\dots,m\},\\ &3)\ \sigma(\mathbb{N}_k)\supset\textstyle\bigcup_{i=1}^{m}\tau_i(\mathbb{N}_k),\ \text{ნებისმიერი } k\in\mathbb{N}\text{-თვის.}\end{aligned}\tag{3.24}$$

დამტკიცება: განვიხილოთ მიმდევრობა

$$A=\{a_1,a_2,\dots,a_{2m+2},\dots\}=\{1,\tau_1(1),\tau_2(1),\dots,\tau_m(1),2,\tau_1(2),\dots,\tau_m(2),\dots\}$$

და შემოვიღოთ ფუნქცია $\tau: \mathbb{N}\to A$. (3.23)-ის თანახმად ცხადია

$$\lim_{k\to+\infty}\tau(k)=+\infty,\quad \tau(\mathbb{N}_k)\supset\tau_i(\mathbb{N}_k),\quad \forall k\in\mathbb{N} \tag{3.25}$$

შემოვიღოთ სიმრავლეთა ოჯახი A_i:

- $s\in A_1 \Leftrightarrow s\in\mathbb{N}, \tau(s)=inf\{\tau(k): k\in\mathbb{N}\}$,
- $s\in A_j \Leftrightarrow s\in\mathbb{N}, \tau(s)=inf\left\{\tau(k): k\in\mathbb{N}\setminus\bigcup_{i=1}^{j-1}A_i\right\}, j=2,3\dots,$

აღვნიშნოთ

$$\xi_j = \max A_j\,, j = 1,2, \dots\,, \qquad \xi_1^0 = \xi_1, \qquad \xi_i^0 = \max\{\xi_j, \xi_{j-1}^0\}\,, j = 2,3, \dots$$

ავაგოთ σ ფუნქცია შემდეგნაირად: $\sigma(k) = \tau(\xi_1)$, როცა $1 \le k \le \xi_1^0$, $\sigma(k) = \tau(\xi_j)$, როცა $\xi_{j-1}^0 \le k \le \xi_j^0$, $j = 2,3, \dots$. σ ფუნქცია ცხადია არის არაკლებადი და აკმაყოფილებს 1) და 2) პირობებს. ჩვენ აგრეთვე გვაქვს $\sigma(\mathbb{N}_k) \supset \tau(\mathbb{N}_k)$ ნებისმიერი $k \in \mathbb{N}$-თვის. ამიტომ (3.25)-ის თანახმად $\sigma(\mathbb{N}_k) \supset \tau_i(\mathbb{N}_k)$, $(i = 1, \dots, m)$. მაშასადამე სრულდება 3) პირობა.

ლემა 3.2. ვთქვათ $\psi, \varphi\colon \mathbb{N}_{k_0} \to (0, +\infty)$, ψ არის არაზრდადი და

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi(k) = +\infty, \tag{3.26}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \tilde{\varphi}(k)\psi(k) = 0, \tag{3.27}$$

სადაც $\tilde{\varphi}(k) = \inf\{\varphi(s)\colon s \ge k_1; s \in \mathbb{N}\}$. მაშინ არსებობს ზრდადი ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა $\{k_i\}_{i=1}^{+\infty}$ ისეთი, რომ

$$\tilde{\varphi}(k_i) = \varphi(k_i), \qquad \tilde{\varphi}(k)\psi(k) \ge \tilde{\varphi}(k_i)\psi(k_i), \qquad k \le k_i, \; i = 1,2, \dots\,. \tag{3.28}$$

დამტკიცება: ვთქვათ $k \in \mathbb{N}$. E_i-ით აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლეები:

$$k \in E_1 \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(k) = \varphi(k), \tag{3.29}$$

$$k \in E_2 \Leftrightarrow \tilde{\varphi}(k)\psi(k) \ge \tilde{\varphi}(s)\psi(s), \qquad s = 1,2, \dots, k \tag{3.30}$$

ცხადია, რომ $sup\, E_i = +\infty$, $(i = 1,2)$. მართლაც, ვთქვათ $k \in \mathbb{N}$, აღვნიშნოთ $k_1 = inf\{\varphi(s); s \in \mathbb{N}_k\}$. მაშინ (3.26)-ის თანახმად ცხადია, $k_1 \in [k, +\infty)$ და $\tilde{\varphi}(k_1) = \varphi(k_1)$. მაშასადამე, $k_1 \in E_1$. თუ გავაგრძელებთ და ავიღებთ $k \ge k_1$, მარტივად დავრწმუნდებით, რომ $sup\, E_1 = +\infty$. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $sup\, E_2 = +\infty$.

ვაჩვენოთ, რომ $sup\, E_1 \cap E_2 = +\infty$. ვიგულისხმოთ, რომ $k_* \in E_2$ და $k_* \notin E_1$. ამიტომ არსებობს $k^* > k_*, k^* \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ $\tilde{\varphi}(k^*) = \tilde{\varphi}(k)$ როცა $k \in [k_*, k^*]$ და $\tilde{\varphi}(k^*) = \varphi(k^*)$. მაშასადამე $k^* \in E_1$. მეორე მხრივ, რადგან ψ არაზრდადია, ამიტომ ცხადია, რომ $k^* \in E_2$.

ე.ი. $k^* \in E_1 \cap E_2$. თუ გავაგრძელებთ ანალოგიურ მსჯელობას მივიღებთ $sup\, E_1 \cap E_2 = +\infty$. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.2. ვთქვათ $k_0 \in \mathbb{N}$, $U_{k_0} \neq \emptyset$ და სრულდება (3.1), (3.2) პირობები, მაშინ არსებობს $\lambda_0 \in [0,1]$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}\sum_{l=1}^{k-1}\sigma(l)^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\sum_{i=l}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} s^{(\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0))\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)\right)\leq 1, \qquad (3.31)$$

სადაც $h_{1\varepsilon}, h_{2\varepsilon}, h_\varepsilon$ მოცემულია ტოლობით (2.7) და σ რაიმე ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.25) პირობებს.

დამტკიცება: პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ (3.1) ლემის თანახმად, არსებობს ფუნქცია σ, რომელიც აკმაყოფილებს (3.24) პირობებს. ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $\lambda_0 \in [0,1]$ ისეთი, რომ სრულდება (3.31) პირობა. U_{k_0}-ის განმარტებით (1.1) განტოლებას გააჩნია ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $u(k) > 0$, როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}$. მაშინ ლემა 2.5 ძალით გვაქვს

$$u(k)\uparrow +\infty, \qquad \frac{u(k)}{k}\downarrow 0, \qquad \text{როცა } k\to+\infty. \qquad (3.32)$$

და

$$u(k) \geq \sum_{l=k_1}^{k-1}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right), k \in N_{k_0} \qquad (3.33)$$

როგორც ეს ნაჩვენები იყო თეორემა (3.1)-ის დამტკიცების დროს.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Lambda_u = \left\{\lambda \in [0,1): \lim_{k\to+\infty}\frac{u(k)}{k^\lambda} = +\infty\right\}, u \in H_{k_0,\tau}$$

(3.32)-დან გამომდინარე ცხადია $0 \in \Lambda_u$ და $1 \notin \Lambda_u$ მაშასადამე

$$\Lambda_u \subset [0,1) \text{ და } \lambda_0 = sup\,\Lambda_u.$$

ვაჩვენოთ, რომ ასე შერჩეული λ_0-თვის სამართლიანია (3.31) უტოლობა. (3.31)-დან გამომდინარეობს

$$\lim_{k\to+\infty} inf \frac{u(k)}{k^{\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}} = 0 \ \text{და} \lim_{k\to+\infty} inf \frac{u(k)}{k^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = +\infty, \tag{3.34}$$

$$0 < \lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0) < \lambda_0 + h_{2\varepsilon}(\lambda_0) \le 1 \tag{3.35}$$

აღვნიშნოთ

$$\tilde{\varphi}(k) = \min\left\{\left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(s)} : s \ge k \ge k_0, \qquad s \in \mathbb{N}\right\} \tag{3.36}$$

სადაც

$$\mu(s) = \min\{1, \mu_i(s): i = 1,2,\dots,m\} \tag{3.37}$$

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ε-თვის სრულდება

$$\lim_{k\to+\infty} k^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\tilde{\varphi}(k) = 0. \tag{3.38}$$

მართლაც საკმარისად მცირე დადებითი ε-თვის (3.35) და (3.36)-ის თანახმად გვექნება

$$s^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\tilde{\varphi}(k) \le s^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} \frac{u(s)}{s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}} = \frac{u(s)}{s^{\lambda_0+h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}},$$

ამიტომ თუ (3.34)-ის პირველ პირობას, მივიღებთ, რომ სამართლიანია (3.38).

(3.33)-დან, რადგან $\sigma(k) \to +\infty$, როცა $k \to +\infty$, გვექნება

$$u(\sigma(k)) \ge \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1} \sum_{i=l}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)} |u(s)|^{\mu_j(s)} \Delta_s \Gamma_j(s,i) \right), k \in N_{k_2} \tag{3.39}$$

სადაც $k_2 \in \mathbb{N}_{k_1}$ საკმარისად დიდი ნატურალური რიცხვია (3.34) და (3.35)-ის თანახმად ფუნქციები

$$\varphi(k) = \left(\frac{u(k)}{k^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(k)}, \qquad \psi(k) = k^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} \tag{*}$$

აკმაყოფილებენ 3.2 ლემის პირობებს, ამიტომ σ ფუნქციის განმარტების თანახმად მოიძებნება ისეთი $\{k_i\}_{i=3}^{+\infty}$, $k_i \in \mathbb{N}_{k_2}$ ნატურალურ რიცხვთა მიმდევრობა, რომ

$$\tilde{\varphi}\big(\sigma(k_i)\big) = \varphi\big(\sigma(k_i)\big), \qquad \tilde{\varphi}\big(\sigma(k)\big)\psi\big(\sigma(k)\big) \geq \tilde{\varphi}\big(\sigma(k_i)\big)\psi\big(\sigma(k_i)\big), \quad k_2 \leq k \leq k_i, \quad i = 3,4,\dots . \tag{3.40}$$

რადგან σ ფუნქცია აკმაყოფილებს (3.24) პირობებს, ამიტომ ცხადია

$$\tilde{\varphi}\left(\tau_j(k)\right) \geq \tilde{\varphi}\big(\sigma(k)\big), \ j = 1,2,\dots,m,. \tag{3.41}$$

(3.34)-ის მეორე პირობის გათვალისწინებით, (3.39)-დან საკმარისად დიდი k-თვის გვექნება

$$u\big(\sigma(k)\big) \geq \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\left(\frac{u(s)}{s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu_j(s)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right) \geq$$
$$\geq \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\tilde{\varphi}(s)\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)$$

რადგან $\tilde{\varphi}$ არაკლებადია (3.41)-ით გვექნება

$$u\big(\sigma(k)\big) \geq \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\tilde{\varphi}\left(\sigma_j(i)\right)\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right) \geq$$
$$\geq \sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}\tilde{\varphi}\big(\sigma(l)\big)\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)$$

აქედან თუ გავითვალისწინებთ (3.40)-ის მეორე უტოლობას და (*)-ის მეორე ტოლობას

$$u\big(\sigma(k_i)\big) \geq \tilde{\varphi}\big(\sigma(k_i)\big)(\sigma(k_i))^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\sum_{n=k_1}^{\sigma(k_i)-1}(\sigma(n))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\sum_{l=n}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right),$$

ამიტომ (3.40)-ის პირველი პირობიდან გვექნება

$$u\big(\sigma(k_i)\big) \geq \left(\frac{u\big(\sigma(k_i)\big)}{\big(\sigma(k_i)\big)^{\lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))} \big(\sigma(k_i)\big)^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}$$
$$\cdot \sum_{n=k_1}^{\sigma(k_i)-1} \big(\sigma(n)\big)^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \sum_{l=n}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} \left(s^{\lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)} \Delta_s \Gamma_j(s,l) \right),$$

ე.ი.

$$\left(\left(\frac{u\big(\sigma(k_i)\big)}{\big(\sigma(k_i)\big)^{\lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))} \big(\sigma(k_i)\big)^{-h_\varepsilon(\lambda_0)}\right)^{\frac{1-\mu(\sigma(k_i))}{\mu(\sigma(k_i))}} \geq \big(\sigma(k_i)\big)^{-\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0) + \left(1 - \frac{1}{\mu(\sigma(k_i))}\right) h_\varepsilon(\lambda_0)}$$
$$\cdot \sum_{n=k_1}^{\sigma(k_i)-1} \big(\sigma(n)\big)^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \sum_{l=n}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} \left(s^{\lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)} \Delta_s \Gamma_j(s,l) \right), \tag{3.42}$$

მეორე მხრივ, რადგან $\mu\big(\sigma(k_i)\big) \leq 1$, ამიტომ

$$\big(\sigma(k_i)\big)^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} \leq \big(\sigma(k_i)\big)^{-h_\varepsilon(\lambda_0)\mu(\sigma(k_i))},$$

ე.ი.

$$\left(\frac{u\big(\sigma(k_i)\big)}{\big(\sigma(k_i)\big)^{\lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))} \big(\sigma(k_i)\big)^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} \leq \left(\frac{u\big(\sigma(k_i)\big)}{\big(\sigma(k_i)\big)^{\lambda_0 + h_{2\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))}$$

ლემა 3.2-ის თანახმად, თუ გავითვალისწინებთ (3.28) და იმ ფაქტს, რომ $\lim_{i\to+\infty} \inf \mu(k_i) > 0$, გვექნება

$$\lim_{i\to+\infty} \left(\frac{u\big(\sigma(k_i)\big)}{\big(\sigma(k_i)\big)^{\lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}}\right)^{\mu(\sigma(k_i))} \big(\sigma(k_i)\big)^{-h_\varepsilon(\lambda_0)} = 0$$

მაშასადამე საკმარისად დიდი k-თვის (3.42)-ის მარცხენა მხარე ნაკლებია ან ტოლი 1-ის.

ე.ი.

$$\lim_{i\to+\infty} \sup \big(\sigma(k_i)\big)^{-\lambda_0 - h_{2\varepsilon}(\lambda_0)\left(1 - \frac{1}{\mu(\sigma(k_i))}\right) h_\varepsilon(\lambda_0)}$$
$$\cdot \sum_{n=k_1}^{\sigma(k_i)-1} \big(\sigma(n)\big)^{h_\varepsilon(\lambda_0)} \sum_{l=n}^{+\infty} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} \left(s^{\lambda_0 - h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)} \Delta_s \Gamma_j(s,l) \right) \leq 1,$$

$$\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda_0-h_{2\varepsilon}(\lambda_0)+\left(1-\frac{1}{\mu(k)}\right)h_\varepsilon(\lambda_0)}$$
$$\cdot\sum_{l=k_1}^{\sigma(k)-1}(\sigma(l))^{h_\varepsilon(\lambda_0)}\sum_{i=l}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tau_j(i)}\left(s^{\lambda_0-h_{1\varepsilon}(\lambda_0)}\right)^{\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)\le 1,$$

ამ უტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როდესაც $\varepsilon\to 0$, მივიღებთ (3.31)-ს. თეორემა დამტკიცებულია.

4. ამონახსნების რხევადობის საკმარისი პირობები.

თეორემა 4.1 ვთქვათ რომელიმე $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის სრულდება (3.1)- (3.4) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{i^{-h_\varepsilon(\lambda)}}{i(i+1)}\sum_{l=k_1}^{i} l\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)\right)>1, \quad (4.1)$$

სადაც $h_{1\varepsilon}, h_{2\varepsilon}, h_\varepsilon$ მოცემულია ტოლობით (2.7), მაშინ (1.1) განტოლებას ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $u: \mathbb{N}_{k_0} \to (0,+\infty)$ არის (1.1) განტოლების წესიერი ამონახსნი, მაშასადამე $U_{k_0} \neq \emptyset$. თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 3.1-ს, ადვილი მისახვედრია, რომ არსებობს $\lambda_0 \in [0,1]$ ისეთი, რომ სრულდება (3.4') განტოლება. რაც ეწინააღმდეგება (4.1), რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თეორემა 3.2-ის ანალოგიურად ადვილი მისაღებია შემდეგი.

თეორემა 4.2 ვთქვათ რომელიმე $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის სრულდება (3.1)- (3.4) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\sigma(i)^{h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=i}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)\right)>1, \quad (4.2)$$

სადაც და σ რაიმე ფუნქციაა, რომელიც აკმაყოფილებს (3.25) პირობებს, მაშინ (1.1) განტოლებას ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

შედეგი 4.1. ვთქვათ რომელიმე $k_0 \in \mathbb{N}$-თვის სრულდება (3.1)- (3.4) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის არსებობს $\delta > 1$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k} i\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)\right)>(1-\lambda)\delta, \quad (4.3)$$

მაშინ (1.1) განტოლებას ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება: ვაჩვენოთ, რომ თეორემა 4.1-ის თანახმად სრულდება (4.1). (4.3)-ის თანახმად არსებობს $k_1 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_0 > 0$ და $\delta_1 \in (0, \delta]$ ისეთი, რომ როცა $k \in \mathbb{N}_{k_1}$,

$$k^{-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)} \sum_{l=1}^{k} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)} \Delta_s \Gamma_j(s,l) \right) > (1-\lambda)\delta_1, \tag{4.4}$$

(4.4)-დან გვაქვს

$$I(k,\varepsilon) := k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i^{-h_\varepsilon(\lambda)}}{i(i+1)} \sum_{l=k_1}^{i} l \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)} \Delta_s \Gamma_j(s,l) \right) \geq$$

$$\geq k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{(1-\lambda)\delta_1 i^{\lambda-h_\varepsilon(\lambda)+h_{1\varepsilon}(\lambda)}}{i(i+1)} = \delta_1(1-\lambda) k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} i^{\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)} \int_i^{i+1} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$I(k,\varepsilon) \geq \delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0) k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} (i+1)^{\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)} \int_i^{i+1} \frac{d\xi}{\xi^2} \geq$$

$$\geq \delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0) k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{i=k}^{+\infty} \int_i^{i+1} \xi^{\lambda-2-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\, d\xi =$$

$$= \delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0) k^{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)} \int_k^{+\infty} \xi^{\lambda-2-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\, d\xi = \frac{\delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0)}{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)},$$

სადაც $\delta_1(1-\varepsilon_0) > 1$. აქედან

$$\lim_{k\to+\infty} \inf I(k,\varepsilon) > \frac{\delta_1(1-\lambda)(1-\varepsilon_0)}{1-\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)},$$

სრულდება (4.1) პირობა, მივიღეთ დასამტკიცებელი.

შედეგი 4.2. ვთქვათ (3.1)- (3.4) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის არსებობს $\delta > 1$ ისეთი, რომ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)\right)>\lambda(1-\lambda)\delta, \quad (4.5)$$

მაშინ (1.1) განტოლებას ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება: შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (4.5)-დან გამომდინარეობს (4.3). მართლაც, თუ ვისარგებლებთ (2.1) ლემით, გვექნება

$$k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k} i\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)=$$

$$k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k} i^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\left(i^{2-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)\right)=$$

$$k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)+$$

$$k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\left(i^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}-(i+1)^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\right)A_i,$$

$$A_i := \sum_{l=1}^{i} l^{2-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tilde{\tau}_j(l)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right).$$

მაშასადამე (4.5)-ის თანახმად, საკმარისად დიდი k-თვის გვექნება

$$k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k} i\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(i)}^{\tilde{\tau}_j(i)} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,i)\right)\geq$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)\delta+k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1} i\left(i^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}-(i+1)^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\right)i^{-1}A_i \geq$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)\delta\left(1+k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1} i\left(i^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}-(i+1)^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\right)\right)=$$

$$=\lambda(1-\lambda)\delta\left(1+k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{i}{i+1}(i+1)\big(\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)\big)\int_{i}^{i+1}\xi^{\lambda-2+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\,d\xi\right)\geq$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)\delta\left(1+k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{k-1}\int_{i}^{i+1}\xi^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\,d\xi\,\big(\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)\big)\right)=$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)\delta\left(1+k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}(1-\varepsilon)\int_{1}^{k}\xi^{\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\,d\xi\,\big(\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)\big)\right)=$$

$$=\lambda(1-\lambda)\delta\left(1+\frac{(1-\varepsilon)\big(\lambda-1+h_{2\varepsilon}(\lambda)\big)}{\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}\big(k^{\lambda+h_{2\varepsilon}(\lambda)}-1\big)k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\right)=$$

$$=\lambda(1-\lambda)\delta\frac{1+o(1)}{\lambda}\geq\lambda(1-\lambda)\delta o(1).$$

მაშასადამე სრულდება შედეგი (4.1)-ის პირობა, რაც ამტკიცებს შედეგი (4.1)-ის სამართლიანობას.

შედეგი 4.3 ვთქვათ $\alpha_i\in(0,+\infty)$, $(i=1,\dots,m)$ და

$$\lim_{k\to+\infty}\inf\frac{\sigma_i(k)}{k^{\alpha_i}}>0,\qquad (i=1,\dots,m),\tag{4.6}$$

მაშინ, იმისათვის, რომ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი საკმარისია, რომ ნებისმიერი $\lambda\in[0,1]$-თვის სრულდებოდეს

$$\lim_{\varepsilon\to0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1} i^{\alpha h_{\varepsilon}(\lambda)}\sum_{l=i}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)\right)>1,\tag{4.7}$$

$$\alpha=min\{1,\alpha_1,\dots,\alpha_m\}.\tag{4.8}$$

დამტკიცება: შედეგის დასამტკიცებლად ვაჩვენოთ, რომ არსებობს $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (3.24) პირობებს და სრულდება (4.2) პირობა. (4.6)-თანახმად არსებობს ისეთი $c \in (0,1)$, რომ სრულდება $\sigma_i(k) \geq ck^{\alpha}$, $(i = 1, \dots, m)$, $k \in \mathbb{N}$, სადაც α მოცემული (4.8) ტოლობით და ფუნქცია $\sigma(k) = [ck^{\alpha}]$ აკმაყოფილებს (3.24) პირობებს. მეორე მხრივ (4.2)-დან გვაქვს

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\sigma(i)^{h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=i}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)\right)\geq$$

$$\geq \lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}i^{\alpha h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=i}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)\right)\lim_{\varepsilon\to 0}\inf c^{h_\varepsilon(\lambda)},$$

რადგან $h_\varepsilon(\lambda) \to 0$, როცა $\varepsilon \to 0$, ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (4.7)-ს მივიღებთ.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{i=1}^{k-1}\sigma(i)^{h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=i}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)\right)>1,$$

მაშასადამე სრულდება (4.2). შედეგი 4.3 დამტკიცებულია.

შედეგი 4.4. ვთქვათ სრულდება (4.6) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის გვაქვს

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{1-\lambda+\alpha h_\varepsilon(\lambda)-h_{2\varepsilon}(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}s^{(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)\right)>\lambda, \tag{4.9}$$

მაშინ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება: შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ (4.9)-დან გამომდინარეობს (4.7). (4.9)-ის თანახმად არსებობს $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{+\infty}$ დადებით ნამდვილ რიცხვთა მიმდევრობა, $\varepsilon \to 0$, როცა $i \to +\infty$, $\delta > 0$ და $k_i \in \mathbb{N}$, $(i = 1,2, \dots)$, ისეთი, რომ

$$k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right)\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)>\lambda+\delta,$$

$$k \in \mathbb{N}_{k_i}$$

ამიტომ

$$I(k,\varepsilon_i) \coloneqq k^{-\lambda-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{n=1}^{k-1} n^{\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=n}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right)\mu_j(s)} \Delta_s \Gamma_j(s,l) \right) \geq$$

$$\geq k^{-\lambda-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{n=k_i}^{k-1} n^{\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=n}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right)\mu_j(s)} \Delta_s \Gamma_j(s,l) \right) \geq$$

$$\geq k^{-\lambda-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} (\lambda+\delta) \sum_{n=k_i}^{k-1} n^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}, \qquad i = 1,2,\dots, \qquad k \in \mathbb{N}_{k_i},$$

ამრიგად

$$\lim_{k\to+\infty} \inf I(k,\varepsilon_i) \geq \lim_{k\to+\infty} \inf \left(k^{-\lambda-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} (\lambda+\delta) \sum_{n=k_i}^{k-1} n^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \right), \qquad i = 1,2,\dots. \tag{4.10}$$

მეორე მხრივ, რადგან $1-\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda) \leq 0$, ამიტომ საკმარისად დიდი k_i-თვის გვექნება

$$\sum_{n=k_i}^{k-1} n^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \geq \sum_{n=k_i}^{k-1} \int_n^{n+1} \xi^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\, d\xi = \int_{k_i}^{k} \xi^{\lambda-1+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \left(k^{\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} - k_i^{\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \right), \qquad k \in \mathbb{N}_{k_i}.$$

ამიტომ (4.10)-დან გვაქვს

$$\lim_{k\to+\infty} \inf I(k,\varepsilon_i) \geq \frac{\lambda+\delta}{\lambda+h_{2\varepsilon_i}(\lambda)},$$

ე.ი

$$\lim_{i\to+\infty} \sup \left(\lim_{k\to+\infty} \inf I(k,\varepsilon_i) \right) \geq \frac{\lambda+\delta}{\lambda} > 1.$$

ეს ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 4.5. ვთქვათ სრულდება (4.6) პირობები და ნებისმიერი $\lambda \in [0,1]$-თვის გვაქვს

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup\left(\lim_{k\to+\infty}\inf k^{1+(\alpha-1)h_\varepsilon(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)} s^{\left(\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)\right)\mu_j(s)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)\right)>\lambda(1-\lambda), \tag{4.11}$$

მაშინ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება: თუ გავითვალისწინებთ, რომ $h_{1\varepsilon}(0)=0$, მაშინ ცხადია, რომ (4.11)-დან გამომდინარეობს (4.9). ქვემოთ ვიგულისხმოთ, რომ $\lambda\in(0,1]$. (4.11)-ის თანახმად არსებობს $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{+\infty}$ დადებით რიცხვთა მიმდევრობა, $\varepsilon\to 0$, როცა $i\to+\infty$, $\delta>0$ და $k_i\in\mathbb{N}$, $(i=1,2,\dots)$, ისეთი, რომ

$$k^{1+(\alpha-1)h_{\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(\frac{s^{\mu_j(s)}}{l}\right)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)>\lambda(1-\lambda)(1+\delta), \tag{4.12}$$

$$k\in\mathbb{N}_{k_i}$$

მეორე მხრივ, ლემა 2.2-ის თანახმად

$$I(k,\varepsilon_i)\coloneqq k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(\frac{s^{\mu_j(s)}}{l}\right)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)=$$

$$=k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}k^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{l=k}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(l)}^{\tau_j(l)}\left(\frac{s^{\mu_j(s)}}{l}\right)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\Delta_s\Gamma_j(s,l)\right)+$$

$$+k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}\sum_{l=k+1}^{+\infty}\left(l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}-(l-1)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\right)A_l$$

$$A_l\coloneqq\sum_{n=l}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=\sigma_j(n)}^{\tau_j(n)}\left(\frac{s^{\mu_j(s)}}{n}\right)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\Delta_s\Gamma_j(s,n)\right)$$

(4.12)-ის თანახმად, საკმარისად დიდი k-თვის გვექნება

$$I(k,\varepsilon_i) \geq \lambda(1-\lambda)(1+\delta)\Bigg(1 + k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=k+1}^{+\infty} l^{-1-(\alpha-1)h_{\varepsilon_i}(\lambda)}\left(l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}-(l-1)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\right)\Bigg).$$

რადგან $\alpha \leq 1$, უკანასკნელი უტოლობიდან გვაქვს

$$I(k,\varepsilon_i) \geq \lambda(1-\lambda)(1+\delta)\Bigg(1 + k^{1-\lambda+\alpha h_{\varepsilon_i}(\lambda)-h_{2\varepsilon_i}(\lambda)}(k+1)^{(1-\alpha)h_{\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=k+1}^{+\infty} l^{-1}\left(l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}-(l-1)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\right)\Bigg) \geq$$

$$\geq \lambda(1-\lambda)(1+\delta)\left(1 + k^{1-\lambda+h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{(1-\alpha)h_{\varepsilon_i}(\lambda)} \sum_{l=k+1}^{+\infty} l^{-1}\left(l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}-(l-1)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\right)\right)$$

მეორე მხრივ გვაქვს

$$\sum_{l=k+1}^{+\infty} l^{-1}\left(l^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}-(l-1)^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\right) = \left(\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right)\sum_{l=k+1}^{+\infty} l^{-1}\int_{l-1}^{l} \xi^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)-1}\,d\xi =$$

$$\geq \left(\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right)\sum_{l=k+1}^{+\infty}\int_{l-1}^{l} \xi^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)-2}\,d\xi = \left(\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)\right)\int_{k+1}^{+\infty} \xi^{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)-2}\,d\xi$$

აქედან გამომდინარე გვექნება

$$I(k,\varepsilon_i) \geq \lambda(1-\lambda)(1+\delta)\left(1+\left(\frac{k}{k+1}\right)^{(1-\alpha)h_{\varepsilon_i}(\lambda)} \frac{\lambda-h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}{1-\lambda+h_{1\varepsilon_i}(\lambda)}\right)$$

უკანასკნელი უტოლობიდან გამომდინარეობს (4.9), რითიც მტკიცდება შედეგი.

შედეგი 4.6. ვთქვათ $\alpha_i, \beta_i \in (0,+\infty)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \leq \beta_i \leq 1$, $P_i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $(i=1,\dots,m)$, სრულდება (1.2) უტოლობა და

$$|F(u)(k)| \geq \sum_{l=1}^{m} P_l(k) \sum_{s=[\alpha_l k]}^{[\beta_l k]} |u(s)|^{1+\frac{d_l}{\log_2 s}}, \tag{4.13}$$

მაშინ იმისთვის, რომ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი, საკმარისია

$$\underset{k\to+\infty}{lim}\inf k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^3\left(\prod_{l=1}^{m} P_l(i)\right)^{\frac{1}{m}} > \max_{\lambda\in[0,1]}\left\{\frac{\lambda(1-\lambda)(\lambda+1)2^{-\frac{\lambda}{m}\sum_{l=1}^{m} d_l}}{\left(\prod_{l=1}^{m}\left(\beta_l^{1+\lambda}-\alpha_l^{1+\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{m}}}\right\} \tag{4.14}$$

დამტკიცება: შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ, როდესაც $\sigma_l(k) = [\alpha_l k]$, $\tau_l(k) = [\beta_l k]$, $\Gamma_l(s,i) = P_l(i)s$, $\mu_l(s) = 1 + \frac{\alpha_l}{log_2 s}$,$(l = 1, \dots, m)$, (4.14)-დან გამომდინარეობს (4.5) უტოლობა. მართლაც

$$I(k,\varepsilon) \coloneqq k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i)\sum_{s=[\alpha_l i]}^{[\beta_l i]} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\left(1+\frac{d_l}{log_2 s}\right)+h_\varepsilon(\lambda)\left(1+\frac{d}{log_2 s}\right)}\right) =$$

$$= k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i)\sum_{s=[\alpha_l i]}^{[\beta_l i]} s^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))}2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))}s^{h_\varepsilon(\lambda)}\,2^{dh_\varepsilon(\lambda)}\right)$$

სადაც $d = \min\{d_1, \dots, d_m\}$.

აქედან გვაქვს

$$I(k,\varepsilon) = k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i)2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))+dh_\varepsilon(\lambda)}\sum_{s=[\alpha_l i]}^{[\beta_l i]} s^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))}\int_{s-1}^{s} d\xi\right)$$

აქედან, რადგან $\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda) \geq 0$ გვაქვს

$$I(k,\varepsilon) \geq k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i)2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))+dh_\varepsilon(\lambda)}\sum_{s=[\alpha_l i]}^{[\beta_l i]}\int_{s-1}^{s}\xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))}\,d\xi\right) =$$

$$k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\left(\sum_{l=1}^{m} P_l(i)2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))+dh_\varepsilon(\lambda)}\int_{[\alpha_l i]-1}^{[\beta_l i]}\xi^{(\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda))}\,d\xi\right) =$$

მაშასადამე

$$I(k,\varepsilon) \geq \frac{k^{-1}}{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)}\sum_{l=1}^{m} P_l(i)2^{d_l(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))+dh_\varepsilon(\lambda)}\left([\beta_l i]^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}-([\alpha_l i]-1)^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\right)$$

რადგან $\frac{[\alpha_i]}{i} \to \alpha$, როცა $i \to +\infty$, ამიტომ უკანასკნელი უტოლობიდან გვაქვს

$$I(k,\varepsilon) \geq \frac{2^{dh_\varepsilon(\lambda)}}{\lambda + h_{1\varepsilon}(\lambda) + 1} k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{1\varepsilon}(\lambda)} i^{1+\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)} \sum_{l=1}^{m} P_l(i) 2^{d_l(\lambda - h_{2\varepsilon}(\lambda))}$$
$$\cdot \left({\beta_l}^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1} - {\alpha_l}^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\right)\big(1+o(1)\big)$$

თუ ვისარგებლებთ საშუალო არითმეტიკული - საშუალო გეომეტრიული უტოლობით მივიღებთ

$$I(k,\varepsilon) \geq \frac{2^{dh_\varepsilon(\lambda)}}{\lambda + h_{1\varepsilon}(\lambda) + 1} \big(1+o(1)\big) k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^3 \left(\prod_{l=1}^{m} P_l(i)\right)^{\frac{1}{m}}$$
$$\cdot \left(\prod_{l=1}^{m} \left({\beta_l}^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1} - {\alpha_l}^{\lambda+h_{1\varepsilon}(\lambda)+1}\right)\right)^{\frac{1}{m}} 2^{\frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m} d_l(\lambda - h_{2\varepsilon}(\lambda))}$$

ამ უკანასკნელიდან, თუ გავითვალისწინებთ (4.14)-ს, არსებობს $\delta > 0$, ისეთი, რომ სრულდება (4.5) უტოლობა, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 4.7. ვთქვათ $\alpha_i, \beta_i \in (0,+\infty)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \leq \beta_i \leq 1$, $(i = 1, \dots, m)$, $P_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_r$, $(i = 1, \dots, m)$, სრულდება (1.2) და (4.13) პირობები, მაშინ იმისთვის, რომ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი, საკმარისია

$$\lim_{k\to+\infty} \inf k \sum_{i=k}^{+\infty} i \left(\prod_{l=1}^{m} P_l(k)\right)^{\frac{1}{m}} > \max_{\lambda\in[0,1]} \left\{ \frac{\lambda(1-\lambda)(\lambda+1)2^{-\frac{\lambda}{m}\sum_{l=1}^{m}\alpha_l}}{\left(\prod_{l=1}^{m}\left(\beta_l^{1+\lambda} - \alpha_l^{1+\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{m}}} \right\} \tag{4.15}$$

დამტკიცება: შედეგი 4.7 მტკიცდება შედეგი 4.6-ის ანალოგიურად, (4.15)-ის თანახმად ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (4.11) უტოლობა, როდესაც $\sigma_l(k) = [\alpha_l k]$, $\tau_l(k) = [\beta_l k]$, $\varGamma_l(s,i) = P_l(i)s$, $\mu_l(s) = 1 + \frac{d_l}{log_2 s}$,$(l = 1, \dots, m)$.

შენიშვნა 4.1. ვთქვათ 4.6 შედეგში პირობა (4.14) არ შეიძლება შეიცვალოს შემდეგი პირობით

$$\lim_{k\to+\infty} \inf k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^3 \left(\prod_{l=1}^{m} P_l(k)\right)^{\frac{1}{m}} \geq \max_{\lambda\in[0,1]} \left\{ \frac{\lambda(1-\lambda)(\lambda+1)2^{-\frac{\lambda}{m}\sum_{l=1}^{m}d_l}}{\left(\prod_{l=1}^{m}\left(\beta_l^{1+\lambda} - \alpha_l^{1+\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{m}}} \right\} \tag{4.16}$$

მოვიყვანოთ მაგალითი იმ შემთხვევისთვის, როდესაც $m = 1$. $d \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta \leq 1$. აღვნიშნოთ

$$C_0 \coloneqq \max_{\lambda\in[0,1]}\left\{\frac{\lambda(1-\lambda)(\lambda+1)2^{-\lambda d}}{\beta^{1+\lambda}-\alpha^{1+\lambda}}\right\},$$

$\lambda_0 \in [0,1]$ სადაც მიიღწევა ეს მაქსიმუმი. (4.17)

განვიხილოთ განტოლება.

$$\Delta^2 u(k) + P(k)\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]}\big(u(s)\big)^{1+\frac{d}{log_2 s}}\mathrm{sgn}\big(u(s)\big) = 0 \tag{4.18}$$

სადაც

$$P(k) = \frac{-\Delta^2 k^{\lambda_0}}{\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0\left(1+\frac{d}{log_2 s}\right)}} = \frac{-\Delta^2 k^{\lambda_0}}{2^{d\lambda_0}\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0}}. \tag{4.19}$$

ცხადია, რომ

$$\Delta^2 k^{\lambda_0} = \frac{\lambda_0(\lambda_0-1)}{k^{2-\lambda_0}} + \frac{o(1)}{k^{2-\lambda_0}}. \tag{4.20}$$

მეორე მხრივ გვაქვს

$$\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0} = \sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0}\int_{s+1}^{s} d\xi \le \sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]}\int_{s}^{s+1}\xi^{\lambda_0}\,d\xi = \int_{[\alpha k]}^{[\beta k]+1}\xi^{\lambda_0}\,d\xi = \tag{4.21}$$

$$= \frac{1}{\lambda_0+1}\big(([\beta k]+1)^{\lambda_0+1} - [\alpha k]^{\lambda_0+1}\big) = \frac{k^{\lambda_0+1}}{\lambda_0+1}\big(\beta^{\lambda_0+1}-\alpha^{\lambda_0+1}\big)\big(1+o(1)\big),$$

აგრეთვე

$$\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0} = \sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0}\int_{s+1}^{s} d\xi \ge \sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]}\int_{s-1}^{s}\xi^{\lambda_0}\,d\xi = \int_{[\alpha k]-1}^{[\beta k]}\xi^{\lambda_0}\,d\xi = \tag{4.22}$$

$$= \frac{1}{\lambda_0+1}\big([\beta k]^{\lambda_0+1} - ([\alpha k]-1)^{\lambda_0+1}\big) = \frac{k^{\lambda_0+1}}{\lambda_0+1}\big(\beta^{\lambda_0+1}-\alpha^{\lambda_0+1}\big)\big(1+o(1)\big),$$

(4.21) და (4.22)-ის თანახმად გვექნება

$$k^{-\lambda_0-1}\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0+1}\left(\beta^{\lambda_0+1}-\alpha^{\lambda_0+1}\right)\left(1+o(1)\right), \tag{4.23}$$

მაშასადამე (4.17), (4.19), (4.20) და (4.23)-ის თანახმად გვაქვს

$$P(k) = \frac{\lambda(1-\lambda)2^{-\lambda_0 d}+o(1)}{k^{2-\lambda_0}\sum_{s=[\alpha k]}^{[\beta k]} s^{\lambda_0}} = \frac{\lambda(1-\lambda)2^{-\lambda_0 d}}{k^3\frac{1}{\lambda_0+1}(\beta^{\lambda_0+1}-\alpha^{\lambda_0+1})}+\frac{o(1)}{k^3} = \frac{C_0}{k^3}+\frac{o(1)}{k^3},$$

ამიტომ გვაქვს

$$\underset{k\to+\infty}{lim}\inf k^{-1}\sum_{i=1}^{k} i^3 P(i) = C_0,$$

ე.ი. სრულდება (4.16) პირობა, მაგრამ ამასთან (4.18) განტოლებას გააჩნია დადებითი ამონახსნი $u(k) = k^{\lambda_0}$.

5. გადახრილ არგუმენტებიანი თითქმის წრფივი სხვაობიანი განტოლებები

ქვემოთ მოცემულ პარაგრაფში ყველგან იგულისხმება, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$|F(u)(k)| \geq \sum_{i=1}^{m} P_i(k) \left|u\big(\delta_i(k)\big)\right|^{\mu_i(k)} \tag{5.1}$$

როცა $k \in \mathbb{N}_{k_0}$, $u \in H_{k_0,\tau}$, სადაც $k_0 \in \mathbb{N}$ საკმარისად დიდი რიცხვია. აგრეთვე ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

$$\delta_i: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to+\infty} \delta_i = +\infty, \qquad i = (1, \dots, m), \tag{5.2}$$

$$\begin{gathered} P_i: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+, \qquad \mu_i: \mathbb{N} \to (0, +\infty), \qquad i = (1, \dots, m), \\ \lim_{k\to+\infty} inf\, \mu_i > 0, \qquad i = (1, \dots, m). \end{gathered} \tag{5.3}$$

თეორემა 5.1. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, შესრულებულია (1.2) და (5.1) პირობები და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{m} P_i(k) \left|u\big(\delta_i(k)\big)\right|^{\mu_i(k)} = +\infty, \tag{5.4}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{i=1}^{m} P_i(k) = +\infty, \tag{5.5}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \inf \left(\lim_{k\to+\infty} \inf k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^{2-\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda)} \sum_{l=1}^{m} P_l(i) \big(\tilde{\tau}_l(i)\big)^{(\lambda-h_{2\varepsilon}(\lambda))\mu_l(i)+h_\varepsilon(\lambda)\mu(i)} \right) > \lambda(1-\lambda)\delta, \tag{5.6}$$

სადაც $\delta > 0$, $\lambda \in [0,1]$ და $h_{1\varepsilon}, h_{2\varepsilon}, h_\varepsilon$ მოცემულია ტოლობით (2.7), $\tilde{\tau}_l(i) = min\{l, \delta_l(i): l = 1, \dots, m\}$, $\mu(s) = \min\{\mu_l(i): l = 1, \dots, m\}$, მაშინ (1.1) განტოლებას ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

დამტკიცება: (5.1)-ის თანახმად სრულდება (3.1) განტოლება, სადაც

$$\sigma_i(k) = \delta_i(k) - 1, \qquad \tau_i(\mathrm{k}) = \delta_i(k),$$
$$\mu_i\big(\delta_i(k)\big) = \mu_i(k), \qquad \Gamma_i(\mathrm{s}, k) = P_i(k) l\big(s - \delta_i(k)\big), \qquad (\mathrm{i} = 1, \dots, m), \tag{5.7}$$

$$l(s) = \begin{cases} 0, & s \in (-\infty, 0), \\ 1, & s \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \tag{5.8}$$

$\mathbb{N}_+ = \{0,1,2, \dots\}$. თუ მივიღებთ მხედველობაში (1.2), (5.1)- (5.8) ცხადია სრულდება შედეგი 4.2-ის პირობები, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას.

თუ გავითვალისწინებთ შედეგი 4.5-ის დამტკიცებას, ანალოგიურად მტკიცდება შემდეგი თეორემაც.

თეორემა 5.1. შესრულებულია (4.6),(5.1)- (5.5) და (5.7), (5.8) პირობები

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup \left(\lim_{k \to +\infty} \inf k^{1+(\alpha-1)h_\varepsilon(\lambda)} \sum_{l=k}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} P_l(i) \big(\tau_l(i)\big)^{(\lambda - h_{1\varepsilon}(\lambda))\mu_l(i)} \right) \right) > \lambda(1-\lambda),$$

მაშინ (1.1) განტოლებას ყოველი წესიერი ამონახსნი რხევადია.

შედეგი 4.1. ვთქვათ $\alpha_i \in (0, +\infty)$, $d_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, \dots, m)$, $P_i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $(i = 1, \dots, m)$, სრულდება (1.2) უტოლობა და

$$|F(u)(k)| \geq \sum_{l=1}^{m} P_l(k)\, |u(\alpha_l k)|^{1+\frac{d_l}{\log_2 \alpha_l k}}, \tag{5.9}$$

და სრულდება (5.5), მაშინ იმისთვის, რომ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი, საკმარისია

$$\lim_{k \to +\infty} \inf k^{-1} \sum_{i=1}^{k} i^2 \sum_{l=1}^{m} P_l(i)\, (\alpha_l)^{\lambda} 2^{\lambda d_l} > \lambda(1-\lambda)\delta$$

შედეგი 5.2. ვთქვათ $F \in V(\tau)$, შესრულებულია (1.2),(4.6) და (5.9) პირობები $\alpha_i \geq 1$, $(i = 1, \dots, m)$, მაშინ იმისთვის, რომ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი, საკმარისია

$$\underset{k\to+\infty}{lim}\inf k\sum_{i=k}^{+\infty}\sum_{l=1}^{m}P_l(i)\,(\alpha_l)^{\lambda}2^{\lambda d_l}>\lambda(1-\lambda)\delta.$$

თუ გავითვალისწინებთ საშუალო არითმეტიკულის - საშუალო გეომეტრიულის უტოლობას, ადვილად დავინახავთ, რომ შედეგი 5.1, 5.2 -დან გამომდინარეობს შედეგი 5.3, 5.4.

შედეგი 5.3. ვთქვათ $F\in V(\tau)$, შესრულებულია (1.2) და (5.9) პირობები, მაშინ იმისთვის, რომ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი, საკმარისია

$$\underset{k\to+\infty}{lim}\inf k^{-1}\sum_{i=1}^{k}i^2\left(\prod_{l=1}^{m}P_l(i)\right)^{\frac{1}{m}}>\max_{\lambda\in[0,1]}\left\{\frac{\lambda(1-\lambda)2^{-\frac{\lambda}{m}\sum_{l=1}^{m}d_l}}{\left(\prod_{l=1}^{m}\alpha_l\right)^{\frac{\lambda}{m}}}\right\}. \tag{5.10}$$

შედეგი 5.4. ვთქვათ შესრულებულია (1.2) და (5.9) პირობები, მაშინ იმისთვის, რომ (1.1) განტოლების ყოველი ამონახსნი იყოს რხევადი, საკმარისია

$$\underset{k\to+\infty}{lim}\inf k\sum_{i=k}^{+\infty}\left(\prod_{l=1}^{m}P_l(i)\right)^{\frac{1}{m}}>\max_{\lambda\in[0,1]}\left\{\frac{\lambda(1-\lambda)2^{-\frac{\lambda}{m}\sum_{l=1}^{m}d_l}}{\left(\prod_{l=1}^{m}\alpha_l\right)^{\frac{\lambda}{m}}}\right\}. \tag{5.10}$$

შენიშვნა 5.1. როგორც ნაჩვენები იქნა შენიშვნა 4.1-თვის, მარტივი საჩვენებელია 5.3 და 5.4 შედეგებში მოცემული (5.9) და (5.10) პირობების ოპტიმალურობა. (5.9) და (5.10) უტოლობები ნებისმიერი $\alpha_i\in(0,+\infty)$ და $d_i\in\mathbb{R}$, $(i=1,\dots,m)$, არ შეიძლება იყოს არამკაცრი უტოლობით.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. R. Koplatadze, G. Kvinikadze, Necessary conditions for existence of positive solutions of second order linear difference equations and sufficient conditions for oscillations of solutions. *Nonlinear Oscillations, V12, N2, 180-194.*
2. R. Koplatadze, Oscillation of solutions of linear difference equation with deviated arguments, *Comput. Math. Appl. 2001,42, 477-486.*
3. R. Koplatadze, G. Kvinikadze, I. Stavroulakis, Oscillation of second order linear difference equation deviating arguments. *Appl. Gakötosho, Tokyo, 12, N1, 2002, 217-226.*
4. R. Koplatadze, Quasi-linear functional differential equations with property A.
5. R. Koplatadze, E. Jitsyn, Oscillation criteria for higher order almost linear functional differential equation. *Func. Differ. Equ. 16(3), 2009, 387-434.*
6. R. Koplatadze, Almost linear functional differential equations with property A and B. Transactions of *A. Razmadze. Math. Institute, 170, 276, 215-242.*