ა(ა)იპ "ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი"

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

აბაშიძე ვახტანგი

კვლევითი პროექტი

გლისონის დაფარვის განზოგადებები

ხელმძღვანელი : მამუკა ჯიბლაძე
მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
თსუ ა.რაზმაძის სახელობის მათემატიკის ინსტიტუტის
მათემატიკური ლოგიკის განყოფილების გამგე

1. შესავალი

პროექტში განხილულია კავშირი კლასიკური გლისონის დაფარვის, მისი განზოგადებების ზოგადი ტოპოლოგიური სივრცისთვის და გილისონის დაფარვის აგების ტოპოსების ხერხით ჯონსტონის მიერ, არააუცილებლად ფხიზელი T_0 ალექსადროვის სივრცისთვის, ე.ი. ნებისმიერი ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლისთვის ალექსანდროვის ტოპოლოგიით.

ჰაუსდორფის X სივრცის კლასიკური გლისონის დაფარვა $\tilde{X}$ არის X სივრცის რეგულარულად ჩაკეტილი სიმრავლეების ბულის ალგებრა სტოუნის ორადობით მიღებული [7]. გლისონის დაფარვა არის სურიექციული დაუყვანადი ასახვა $\tilde{X} \to X$ რომელიც ხასიათდება ჰომეომორფიზმამდე სიზუსტით.

შემდგომში, მრავალმა ავტორმა შემოიღო განსხვავებული განზოგადებები ამ კონსტრუქციის სხვადასხვა კლასის სივრცეებისთვის იხილეთ შემდეგი ავტორების შრომებში [[6, 8, 9, 4, 5, 1, 2, 11]] აბსოლუტის(absolute) სახელით.

ნაშრომში ჩვენ განვაზოგადოთ გლისონის დაფარვა ალექსანდროვის ტოპოლოგიისთვის რომელიც არის ნებისმიერი ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლისგან მიღებული. როცა ეს ტოპოლოგია ფხიზელია, გლისონის დაფარვის განზოგადება პირდაპირ გამომდინარეობს აღწერილიდან. რადგან კარგადაა ცნობილი რომ ალექსანდროვის ტოპოლოგიური სივრცე რაიმე P ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლის არის ფხიზელი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა P არის ნოეთერული, ე.ი. იგი არ მოიცავს უსასრულოდ აღმავალ ჯაჭვებს. ამ შემთხვევაში გლისონის დაფარვის აღწერა ზუსტად იმეორებს სასრულ შემთხვევაში ჩვენს მიერ [3] აგებულ კონსტრუქციას: ჩვენ ვიღებთ P-ს მაქსიმალური ელემენტების ქვედა სიმრავლეების თანაუკვეთ გაერთიანებას. მიღებული ასახვა კი მარტივი შესამოწმებელია რომ არის კო-ლოკალური ჰომეომორფიზმი.

ამ ნაშრომში ჩვენი მიზანია გავცეთ პასუხი შემდეგ კითხვას: რომელი ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლისგან მიღებული ალექსანდროვის სივრცის გლისონის დაფარვა არის კვლავ გლისონის დაფარვა.

საჭირო ფაქტები

განმარტება 1.1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს $X_i, i \in I$ ტოპოლოგიურ სივრცეთა ოჯახი , ამ ოჯახის ტოპოლოგიური ჯამი ასე აღინიშნება $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i = \bigcup\limits_{i\in I} X_i \times \{i\}$. ყოველი X_i თვის გვაქვს $j_i : X_i \to \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$ უწყვეტი ინექციური ასახვა.

წინადადება 1.2. ([6, pg. 63]) ნებისმიერი $\{X_i\}_{i\in I}$ ოჯახისთვის თუ გვაქვს $\forall i \in I$, $f_i : X_i \to Y$ უწყვეტი ასახვა, მაშინ არსებობს ერთადერთი $f : \bigoplus\limits_{i\in I} X_i \to Y$ უწყვეტი ასახვა ისეთი, რომ $f|_{X_i} = f_i$.

წინადადება 1.3. ([1, 1.4.18]) ყოველი ჩაკეტილი ასახვა და ყოველი ღია ასახვა არის ფაქტორ ასახვა. თუ უწყვეტი ფაქტორ ასახვა ბიექციაა, მაშინ ის ჰომეომორფიზმია.

განმარტება 1.4. (X, τ) ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება ალექსანდროვის თუ ნებისმიერ ღია სიმრავლეთა თანაკვეთა კვლავ ღიაა.

განმარტება 1.5. $f : X \to Y$ ასახვას ალექსანდროვის ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის ვუწოდოთ კო-ლოკალური ჰომეომორფიზმი თუ $f : X^o \to Y^o$ არის ლოკალური ჰომეომორფიზმი.

განმარტება 1.6. ვთქვათ $(A, \leq)$ რაიმე დალაგებული სიმრავლეა, $(A^o, \geq)$ -თი აღვნიშნავთ A დალაგებულ სიმრავლის უკუღმა დალაგებას.

ამ აღნიშვნას აგრეთვე გამოვიყენებთ ალექსანდროვის სივრცებზე.

წინადადება 1.7. ([8,2.11]) ნებისმიერ არაცარიელ სასრულ დალაგებულ სიმრავლეს გააჩნია მაქსიმალური ელემნტი.

წინადადება 1.8. ვთქვათ მოცემული გვაქვს X ალექსანდროვის ტოპოლოგიური სივრცე სპეციალიზაციით $\leq_\tau$, მაშინ ნებისმიერი $S \subset X$ თვის $int(S) = \{x \in S : \uparrow x \subseteq S\}$.

დამტკიცება. ვთქვათ S რაიმე სიმრავლეა, დავუშვათ საწინააღმდეგო $\exists s \in int(S)$ ისეთი, რომ $\uparrow s \not\subset (S)$ და $s \in int(S)$. ეს ნიშნავს, რომ $\exists x \notin int(S)$ და

$s \leq x$ აქიდან კი მივიღეთ, რომ $int(S)$ არ არის ზედა-სიმრავლე რადგან მასში მოიძებნა ისეთი s ელემენტი რომელიც ნაკლებია S-ის გარეთ ელემენტზე. მაშასადამე მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ახლა ვაჩვენოთ $int(S) \supset \{x \in S : \uparrow x \in S\}$, მართლაც $int(S)$ არის S-ის იმ წერტილთა ერთობლიობა რომლებიც თავიანთი რაიმე მიდამოთი შედიან S-ში. ხოლო x წერტილის უმცირესი მიდამო $\uparrow x$-ია. შესაბამისად თუ $x \in int(S) \Rightarrow \uparrow x \in S$. ამით წინადადება დამტკიცებულია. $\square$

წინადადება 1.9. ვთქვათ მოცემული გვაქვს სასრული X ალექსანდროვის ტოპოლოგიური სივრცე სპეციალიზაციით $\leq_\tau$, მაშინ ნებისმიერი $S \subset X$-თვის $\overline{S} = \bigcup\{\downarrow x : x \in S\}$.

დამტკიცება. $\overline{S} \supseteq \bigcup\{\downarrow x : x \in S\}$ ცხადია, რადგან $S \subset \overline{S}$ ხოლო $\downarrow x$ უმცირესი ჩაკეტილი სიმრავლეა რომელიც x-ს მოიცავს.

ვთქვათ S რაიმე სიმრავლეა, დავუშვათ საწინააღმდეგო $\exists s \in S$, ისეთი, რომ $\downarrow s \not\subset \overline{S}$ აქედან გვაქვს, $\exists x \notin \overline{S}$ ისეთი, რომ $x \leq s$, მაშასადამე $\overline{S}$ არაა ქვედა-სიმრავლე, მაშასადამე არაა ჩაკეტილი. $\square$

წინადადება 1.10. ვთქვათ მოცემული გვაქვს სასრული T_0 ტოპოლოგიური სივრცე სპეციალიზაციით $\leq_\tau$, მაშინ ნებისმიერი $F \in R(X)$-თვის $max(F) = F \cap max(X)$.

დამტკიცება. ცხადია $(F \cap max(X)) \subset max(F)$ რადგან $F \cap max(X) = (max(F) \cap max(X)) \subset max(F)$. ვაჩვენოთ პირიქით $(F \cap max(X)) \supset max(F)$ დავუშვათ საწინააღმდეგო ვთქვათ $\exists x \in max(F)$ ისეთი, რომ $x \notin max(X)$, ე. ი. $\exists x' \notin F$ რომ $x \leq x'$ აქედან კი ინტერიორის განმარტებით $x \notin int(F)$ ხოლო რადგან $x \in max(F)$, $\nexists x_0 \in int(F)$ ისეთი, რომ $x \leq x_0$ ჩაკეტვის ოპერატორის განმარტებით კი $x \notin \overline{int(F)}$, ხოლო აქედან ვღებულობთ, რომ $F \notin R(X)$. $\square$

სურიექციული ასახვა $f : X \to Y$ ალექსანდროვის ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის არის ფაქტორ ასახვა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ნებისმიერი $V \subseteq Y$-ს წინარე სახე $f^{-1}(V)$ არის ზედასიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა V არის ზედა სიმრავლე Y-ში.

განვიხილოთ რაიმე T_0 ტოპოლოგიური სივრცე X. ჩვენი მიზანია ავაგოთ მისი გლისონის სივრცე. გლისონის დაფარვის სივრცე ყოველთვის არის ექსტრემალურად არაბმული.

ალექსანდროვის სივრცე არის ყოველთვის ლოკალურად ბმული, ხოლო ლოკალურად ბმული სივრცე არის ტოპოლოგიური ჯამი ბმული კლოპენებ-ბის.

წინადადება 1.11. ალექსანდროვის ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე არის ტოპოლოგიური ჯამი ბმული ტოპოლოგიური სივრცეებისა, რომლე-ბიც არიან ალექსანდროვის სივრცის ღია-ჩაკეტილი ქვესიმრავლეები.

წინადადება 1.12. ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე და $A \subset X$ არის მისი ღია ქვესიმრავლე. თუ X არის ექსტრემალურად არაბმული სივრცე. მაშინ A არის ასევე ექსტრემალურად არაბმული.

დამტკიცება. განვიხილოთ A სიმრავლის ღია ქვესიმრავლე U. რადგან A ღიაა X-ში, ესე იგი U ასევე ღია სიმრავლეა X-ში. ვინაიდან X არის ექ-სტრემალურად არაბმული სივრცე $\overline{U}$ არის X-ის ღია ქვესიმრავლე, იმიტომ რომ U სიმრავლის ჩაკეტვა A-ში განისაზღვრება შემდეგნაერად $\overline{U} \cap A$, ვას-კვნით რომ $\overline{U_A}$ არის ღია A-ში . □

წინადადება 1.13. იმისათვის რომ X ტოპოლოგიური სივრცე იყოს ექ-სტრემალურად არაბმული და ბმული, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ყოველი ღია სიმრავლე (გარდა ცარიელისა) ამ სივრცეში იყოს ყველგან მკვრივი.

დამტკიცება. აუცილებლობა: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ X ტოპო-ლოგიურ სივრცეში არსებობს ისეთი $U \in \tau(X)$, რომ $\overline{U} \in \tau(X)$ და $\overline{U} \neq X$. ესეიგი მოვნახეთ ღია-ჩაკეტილი სიმრავლე X-ში $\overline{U}$ რომელიც არ ემთხვევა X სივრცეს, რადგან X ბმულია $\overline{U} = \emptyset$.

საკმარისობა: რადგან ყოველი ღია სიმრავლის ჩაკეტვა უდრის X სივ-რცეს, ამიტომ ეს სივრცე ექსტრემალურად არაბმულია. ახლა ვაჩვენოთ ბმულობა. დავუშვათ X არაა ბმული, ე. ი. $\exists A \in X$ ისეთი, რომ $A \neq X, A \neq \emptyset$

და A ღია-ჩაკეტილი სიმრავლეა, აქედან გვაქვს, რომ $A \in \tau(X)$ ხოლო პირობით A ყველგან მკვრივია X სივრცეში, მაშასადამე მივიღეთ წინააღმდეგობა. $\square$

შედეგი 1.1. ალექსანდროვის X ტოპოლოგიური სივრცისთვის შემდეგი ორი წინადადება ექვივალენტურია:

1) X ექსტრემალურად არაბმულია და ბმულია.

2) X სივრცე არის მიმართული სიმრავლე $\leq_\tau$-ს აზრით.

დამტკიცება. $1 \Rightarrow 2$ დავუშვათ საჭინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს ორი განსხვავებული წერტილი $x_1, x_2 \in X$ ისეთი რომ $\uparrow x_1 \cap \uparrow x_2 = \varnothing$. რადგან X არის ეხტრემალურად არაბმული სივრცე და ბმული, გვაქვს ტოლობა $\downarrow\uparrow x_1 = X$, მაშასადამე $x_2 \in \downarrow\uparrow x_1$. აქედან ვასკვნით რომ ყოველი ორი წერტილისთვის $x, y \in X$ არსებობს მესამე წერტილი $z \in X$ ისეთი რომ $x, y \leq_\tau z$.

$3 \Rightarrow 1$ ვთქვათ X სივრცე არის დალაგებული სივრცე $\leq_\tau$-ს აზრით. განვიხილოთ ნებისმიერი არაცარიელი ღია სიმრავლე $U \in X$. ვაჩვენოთ რომ ნებისმიერი $x \in X$-თვის $x \in \overline{U}$. რადგან X არის მიმართული სიმრავლე, ნებისმიერი $x_0 \in U$ და x-თვის არსებობს $z \in X$ ისეთი, რომ $x, x_0 \leq z$, ხოლო რადგან X არის ალექსანდროვის სივრცე და U არის ზედა სიმრავლე $z \in U$, მაშასადამე $x \in \overline{U}$. $\square$

შედეგი 1.2. ნებისმიერი ალექსანდროვის ექსტრემალურად არაბმული X ტოპოლოგიური სივრცე წარმოდგინდება შემდეგნაირად

$$X = \bigoplus_{A \in X} A$$

სადაც A არის X-ის მიმართული ქვესიმრავლე.

დამტკიცება. წინადადება 1.11-ის ძალით X არის ტოპოლოგიური ჯამი ბმული სივრცეების. ყოველი მათგანი X-ში არის ღია-ჩაკეტილი სიმრავლე. აქედან კი წინადადება 1.12-ს ძალით თითოეული მათგანი არის ექსტრემალურად არაბმული, შესაბამისად შედეგი 1.1-ის ძალით ყოველი მათგანი არის მიმართული ქვესიმრავლე. მარტივი დასანახია რომ X არის ამ მიმართული ქვესიმრავლეების ტოპოლოგიური ჯამი.

□

2. სასრული შემთხვევა

წინადადება 2.1. ვთქვათ მოცემული გვაქვს სასრული T_0 ტოპოლოგიური სივრცე, ყოველ $A \in R(X)$-ის ატომს აქვს შემდეგი სახე $\exists a \in max(X)$ ისეთი, რომ $\downarrow a = A$.

დამტკიცება. რადგან A რეგულარულად ჩაკეტილია 1.10-ის ძალით, A-თვის სამართლიანია: $max(A) \subseteq max(X)$, ახლა ვაჩვენოთ, რომ $max(A)$ ერთწერტილიანია. მართლაც თუ $\exists a_1, a_2 \in max(A)$ მაშინ T_0-ობის ძალით ერთ-ერთს მოეძებნება მიდამო რომელიც მეორეს არ შეიცავს ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ $a_2 \notin \uparrow a_1 \Rightarrow \downarrow a_1 \subset A$ და $\downarrow a_1 \in R(X)$ ე. ი. A არ ყოფილა ატომი. □

სასრულ ტოპოლოგიურ სივრცეებს შორის ასახვა $f : X \to Y$ ფაქტორასახვაა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ნებისმიერი $V \subseteq Y$-ისთვის, $f^{-1}(V)$ ზედა სიმრავლეა X-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც V ზედა სიმრავლეა Y-ში.

განვიხილოთ ნებისმიერი X სივრცე რომელიც T_0 აქსიომას აკმაყოფილებს. ჩვენი მიზანია ავაგოთ მისი გლისონის დაფარვა.

კომპაქტური ჰაუსდორფის X სივრცის გლისონის დაფარვაში $p : \tilde{X} \to X$ სივრცე $\tilde{X}$ არის მისი რეგულარულად ჩაკეტილი სიმრავლეების ბულის ალგებრის $R(X)$-ის სტოუნის სივრცე.

ცნობილია ([6. 6 (d)]porter woods) რომ $R(X)$-ის ნებისმიერ S ულტრაფილტრში შემავალი ყველა რეგულარულად ჩაკეტილი სიმრავლის თანაკვეთა ერთელემენტიანი სიმრავლეა და დამფარავი ასახვა p უთანადებს ულტრაფილტრს მისი თანაკვეთის ამ ერთადერთ ელემენტს.

ჩვენ გვინდა ვიპოვოთ ამის მსგავსი ფაქტი, როდესაც X ნებისმიერი T_0 სივრცეა. ამჯერად ვიხილავთ მხოლოდ იმ შემთხვევას, როდესაც X სასრულია.

ვინაიდან მაშინ $R(X)$-იც სასრული იქნება, 2.1-ს გამო მისი ულტრაფილტრები ურთიერთცალსახა თანადობაშია მის ატომებთან.

ამიტომ ბუნებრივია შევისწავლოთ, თუ რას წარმოადგენენ $R(X)$-ის ატომები.

ვთქვათ X სასრული T_0 სივრცის ატომებია $A_1, \ldots, A_N$. თითოეული ატომი ცხადია იქნება ქვედა-სიმრავლე, რომელსაც აქვს უდიდესი ელემენტი. რომელიც შედის თვითონ X სივრცის მაქსიმუმში. განვიხილოთ ეს A_i, $i \in N$ ატომები ინდუცირებული ტოპოლოგიით და შევადგინოთ მათი ტოპოლოგიური ჯამი $\tilde{X} := \bigoplus\limits_{i \in N} A_i$. ეს ჯამი ასევე შეგვიძლია განვიხილოთ შემდეგი სახით

$$\bigoplus_{i \in N} A_i = \{(x, a) | x \leq a \in max(X)\}$$

ხოლო დალაგება გვექნება შემდეგნაირი:

$$(x, a_1) \leq (y, a_2) \Leftrightarrow x \leq y, a_1 = a_2$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ

$$(a, a) \leq (x, a) \Rightarrow a \leq x, a = x.$$

გარდა ამისა, რადგან ყოველთვის $(x, a) \leq (a, a)$, ვღებულობთ, რომ (x, a) არის $\tilde{X}$-ის მაქსიმალური ელემენტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = a$. ეს სახე შემდეში ჩვენთვის ხელსაყრელი იქნება, ამ ჯამის მაქსიმალური ელემენტების რაოდენობა იქნება ზუსტად იგივე რაც X სივრცის მაქსიმუმის, იმიტომ რომ მაქსიმალური ელემენტის ქვედა-სიმრავლე X-ში არის რეგულარულად ჩაკეტილი სიმრავლე რომელიც იქნება $R(X)$-ის ატომი. ცხადია ამ ჯამიდან გვექნება $p : \bigoplus\limits_{i \in N} A_i \rightarrow X$ უწყვეტი სურიექციული ასახვა X სივრცეზე, რომელსაც ასე განვსაზღვრავთ:

$$p(x, a) = x$$

უფრო მეტიც p იქნება ფაქტორ ასახვა, იმიტომ, რომ: $p(A_i) = A_i$. თუ $p^{-1}(V)$ იქნება ღია სიმრავლე ეს ნიშნავს, რომ ყოველ A_i-თან ექნება ღია თანაკვეთა, A_i-ზე კი ტოპოლოგია გვაქვს X-დან ინდუცირებული, შესაბამისად V

იქნება ღია X-შიც და შებამისად $\bigoplus\limits_{i\in N} A_i$ -ში. მაშასადამე ჩვენს მიერ შედგენელი $\bigoplus\limits_{i\in N} A_i$ სივრცე არის კანდიდატი გლისონის დაფარვისა X-თვის.

ლემა 2.2. ასახვა $p : \tilde{X} \to X$ სადაც X არის T_0 სასრული სივრცე და $p(x, a_i) = x, a_i \in max(\tilde{X})$ დაუყვანადია.

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს $F \subsetneq X$ ჩაკეტილი ისეთი, რომ $p(F) = X$. ე. ი. არსებობს $\tilde{X}$-ის მაქსიმუმში (x, x) ელემენტი რომელიც არ ეკუთვნის F-ს. წინააღმდეგ შემთხვევაში F დაემთხვეოდა $\tilde{X}$-ს. გვაქვს

$$x = p(x, x) \in p(F) = X$$

ამრიგად გვაქვს $(y, x) \in F$ ისეთი, რომ $p(y, x) = x$. მაგრამ $p(y, x) = y$, ასე რომ $y = x$ და $(x, x) \in F$. მივიღეთ წინააღმდეგობა, ამით ლემა დამტკიცებულია. $\square$

ლემა 2.3. ასახვა $p : \tilde{X} \to X$ სადაც X არის T_0 სასრული სივრცე, ჩაკეტილია.

დამტკიცება. მართლაც, ავიღოთ ნებისმიერი $(x, a) \in \tilde{X}$-წერტილი და მისი ჩაკეტვა $\downarrow (x, a) = \downarrow (x) \times \{a\}$,

$$p(\downarrow (x, a) = p(\downarrow (x) \times a = \downarrow (x).$$

ახლა განვიხილოთ $F \subset \tilde{X}$ ჩაკეტილი სიმრავლე, ცხადია $F = \bigcup\limits_{x\in F} \downarrow (x)$ აქიდან გვაქვს

$$p(F) = p(\bigcup_{x\in F} \downarrow (x) = \bigcup_{x\in F} p(\downarrow (x)) = \bigcup_{x\in F} \downarrow (p(x))$$

რადგან X სასრული სივრცეა ეს სიმრავლეც ცხადია ჩაკეტილი იქნება. $\square$

ლემა 2.4. ვთქვათ მოცემული გვაქვს X ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს T_0 აქსიომას. მაშინ $p : \tilde{X} \to X$ ასახვისათვის $p|_{A_i} : \tilde{A}_i \to A_i$ არის ჰომეომერფიზმი.

დამტკიცება. ეს არის კერძო შემთხვევა შემდეგი ცხადი ფაქტის: თუ ჩვენ გვაქვს ჰომეომორფიზმების ოჯახი $\tilde{A}_i \approx A_i$, ყოველი $A_i \subseteq X$-თვის, მაშინ ლოგიკური ასახვა $\bigotimes_i \tilde{A} \to X$ სადაც ყოველი $\tilde{A}_i \subseteq \bigotimes_i \tilde{A}$ ასახავს ჰომეომორფულად მის ანასახზე X-ში.

□

შედეგი 2.1. ასახვას $p : \tilde{X} \to X$ გააჩნია შემდეგი თვისება:

$$\forall x \in \tilde{X}, \exists x \in F \subset \tilde{X}, p|_F : F \xrightarrow{\approx} p(F)$$

ყოველი x-თვის, არსებობს ჩაკეტილი $x \in F$, ისეთი, რომ $p|_F$ ჰომეომორფიზმია თავის ანასახზე. მაშასადმე p არის კო-ლოკალური ჰომეომორფიზმი.

თეორემა 2.5. ვთქვათ მოცემული გვაქვს X ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს T_0 აქსიომას და $p : \tilde{X} \to X$ ასახვა, თუ გვაქვს რაიმე სასრული ექსტრემალურად არაბმული Y სივრციდან უწყვეტი ასახვა $f : Y \to X$, მაშინ არსებობს უწყვეტი $\pi : Y \to \tilde{X}$ ასახვა, ისეთი, რომ $p \circ \pi = f$.

დამტკიცება. 1.2 გამო Y წარმოდგინდება ისეთი სასრული სივრცეების ტოპოლოგიურ ჯამად რომელთაც გააჩნიათ უდიდესი ელემენტი, ე. ი. $Y = \bigoplus_{i \in N} \downarrow (y_i)$. ამიტომ 1.2-ის გათვალისწინებით, შეგვიძლია π ასახვა განვსაზღვროდ შემდეგნაირად თითოეული $\downarrow (y_i)$-თვის ცალ-ცალკე : $\forall i \in I$-თვის და $f(y_i)$-თვის $\exists A_k \in X$ ისეთი, რომ $f(y) \in A_k$ (ცხადია $f(\downarrow y_i) \subset A_k$) $y \in (\downarrow y_i)$-თვის $\pi(y) = j_k(f(y))$ სადაც j_k განსაზღვრულია 1.1 შესაბამისად. აქიდან ვღებულობთ, რომ $p\pi = f$ ყოველ $\downarrow (y_i)$-ზე, ვინაიდან $p \circ j_k$ ემთხვევა A_k-ს ჩადგმას X-ში. □

თეორემა 2.6. ვთქვათ მოცემული გვაქვს X ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს T_0 აქსიომას და დაუყვანადი, სურიექციული, კოლოკალური ჰომეომორფიზმი $f : Y \to X$, რაიმე ექსტრემალურად არაბმული Y სივრციდან, მაშინ $\tilde{X}$ ჰომეომორფულია Y-ის და უფრო მეტიც არსებობს ჰომეომორფიზმი $h : Y \to \tilde{X}$ ისეთი, რომ $p \circ h = f$.

დამტკიცება. 2.5-ის ძალით არსებობს $h : Y \to \tilde{X}$ და $h' : \tilde{X} \to Y$ ისეთები, რომ $p \circ h = f$ და $f \circ h' = p$,

როგორც ვიცით (იხ. მაგ. [10, C1. 3. 2 (iii)]) h' და h კო-ლოკალური ჰომეომორფიზმებია, კერძოდ $h(Y)$ არის $\tilde{X}$-ს ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. რადგან p დაუყვანადი ასახვაა და $p \circ h(Y) = X$, ამიტომ $h(Y) = \tilde{X}$. ანალოგიურად $h'(\tilde{X}) = Y$, რადგან $\tilde{X}$ და Y სასრული სიმრავლეებია, ამიტომ $\tilde{X}$ და Y ერთნაირი სიმძლავრე აქვთ. მაშასადამე მათ შორის ნებისმიერი სურიექცია არის ბიექცია. ხოლო რადგან h კო-ლოკალური ჰომეომორფიზმია, ე. ი. ჩაკეტილი ასახვაა. ამიტომ 1.3-დან გამოდის, რომ $h : Y \to \tilde{X}$ ჰომეომორფიზმია. $\square$

3. ზოგადი შემთხვევა

აბსოლუტის (გლისონის დაფარვის) აგება შაპიროს გზით:

[2] ვთქვათ K - არის ყველა ისეთი ღია სიმრავლეების ულტრაფილტრი რომელსაც აქვს დაგროვების წერტილი. ე.ი. $\xi \in K$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\bigcap\limits_{U\in\xi}\overline{U} \neq \emptyset$. აღვნიშნოთ $\tilde{X} = \{(\xi, x) \in K \times X : x \in \bigcap\limits_{U\in\xi}\overline{U}\}$. წერტილს $(\xi, x) \in \tilde{X}$ აღვნიშნავთ ξ_x. განვსაზღვროთ ბუნებრივი პროექცია $\pi_X : \tilde{X} \to X$, $\pi_x(\xi_x) = x$.

ვთქვათ $O_U = \{\xi_x \in \tilde{X} : U \in \xi\}$ ყოველი $U \in X$ ღია სიმრავლისთვის . აღვნიშნოთ მთავარი თვისებები O_U სიმრავლის:

ა) $O_{U\cup V} = O_U \cup O_V$

ბ) $O_{U\cap V} = O_U \cap O_V$

გ) $\overline{U} = \overline{V} \Rightarrow O_U = O_V$

$\tilde{X}$ სიმრავლეზე ტოპოლოგიის ბაზათ მივიღებთ სიმრავლეთა ერთობლიობას რომელთაც აქვთ სახე $O_U \cap \pi_X^{-1}(H)$, სადაც U, H - ღია სიმრავლეა X-ში.

ვიტყვით რომ $x\tilde{\in}F$ ულტრაფილტრს თუ $x \in \cap_{U\in F}\bar{U}$.

ლემა 3.1. ალექსანდროვის ტოპოლოგიურ სივრცეში x წერტილი არის F ულტრაფილტრის დაგროვების წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $\uparrow x \in F$.

დამტკიცება. <u>აუცილებლობა</u>: ვთქვათ $\uparrow x \in F \Rightarrow \forall U \in F, \uparrow x \cap U \neq \emptyset \Rightarrow x\tilde{\in}F$.

<u>საკმარისობა</u>: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $\uparrow x \notin F$ და $x\tilde{\in}F$, $\Rightarrow$ $int(X\setminus \uparrow x) \in F$, რადგან $\uparrow x \cap int(X\setminus\uparrow x) = \emptyset$ მივიღეთ წინააღმდეგობა.

□

ლემა 3.2. $\tilde{X}$ ტოპოლოგიურ სივრცეში $\eta_x \leq \psi_y$ სრულდება მისი სპეციალიზაციის დალაგებით მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $(\eta = \psi)(x \leq y)$ სპეციალიზაციის დალაგებით X-ში.

დამტკიცება. <u>აუცილებლობა</u>: გვაქვს, $\eta = \psi$ და $x \leq y$, უნდა ვაჩვენოთ რომ $\eta_x \leq \psi_y$, რაც იგივეა, $\eta_x \in V \Rightarrow \psi_y \in V$, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ $V = O'_V \cap \pi_X^{-1}(H) \Rightarrow (x \in H) \wedge (V' \in \eta)$.

რადგან $x \leq y \Rightarrow y \in H$. ხოლო რადგან $\eta = \psi \Rightarrow \psi_y = \eta_y$, $\eta_x \in V' \Rightarrow V' \in \eta$ ხოლო რადგან $y \tilde{\in} \eta \Rightarrow \eta_y \in V'$, $\Rightarrow \eta_x \leq \eta_y = \psi_y$.

საკმარისობა: ვაჩვენოთ რომ, თუ $\eta_x \in V \Rightarrow \psi_y \in V$ მაშინ $(\eta = \psi) \wedge (x \leq y)$. შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ $V = O_U \cap \pi_X^{-1}(H)$, ე.ი. თუ $\eta_x \in O_U \cap \pi_X^{-1}(H)$ $\Rightarrow \psi_y \in O_U \cap \pi_X^{-1}(H)$, $\forall U \in \eta, x \in H \in \tau(X)$.

ვთქვათ $H = X$, $\Rightarrow U \in \psi \Rightarrow \eta \subset \psi \Rightarrow \eta = \psi$, აქედან კი თუ $(U \in \eta) \wedge (x \in H) \Rightarrow$ $(U \in \eta) \wedge (y \in H)$, $\Rightarrow x \leq y$.

□

ლემა 3.3. X ტოპოლოგიურ სივრცეში $x \in X$ წერტილი არის სასრულ რაოდენობის ულტრაფილტრებს დაგროვების წერტილი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა, ისეთი $y_k > x$, რომ $\forall i, j \in K$-თვის $\uparrow y_i \cap \uparrow y_j = \emptyset$, K სასრულია.

დამტკიცება. აუცილებლობა: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $x \in F_i, i \in I$ ულტრაფილტრს, სადაც I უსასრულოა. ვაჩვენოთ რომ ნებისმიერი სასრული K-თვის, $y_k > x$ ისეთი, რომ $\forall i, j \in K$, $\uparrow y_i \cap \uparrow y_j = \emptyset$.

F_1, F_2-თვის $\exists U_1 \in F_1, U_2 \in F_2$ ისეთი, რომ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. F_1, F_2, F_3-თვის $\exists U_1 \in F_1, U_2 \in F_2, U_3 \in F_3$ ისეთი, რომ $U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_2 \cap U_3 = \emptyset$... $F_1, ..., F_k$-თვის $\exists U_1 \in F_1, ..., U_k \in F_k$ ისეთი, რომ $U_i \cap U_g = \emptyset$, $\forall k, g \in K$, ნებისმიერი სასრული K-თვის. ყოველ U_j ში დავაფიქსიროთ $y_j \in U_j$, მაშასადამე გვექნება $y_j > x, j \in K$ და $\uparrow y_i \cap \uparrow y_j = \emptyset$, $\forall j, i \in K \subset I$.

საკმარისობა: ვაჩვენოთ რომ ნებისმიერი $x \in X$-თვის თუ $y_j > x, j \in K$ და $\uparrow y_i \cap \uparrow y_j = \emptyset$, $\forall j, i \in K$ და K უსასრულოა მაშინ ისეთი ულტრაფილტრების რაოდენობა რომელთა დაგროვების წერტილი x-ა უსასრულოა.

მართლაც გვაქვს: ყოველი $y_k > x, k \in K$-თვის $\uparrow y_k$-თვის $\exists F_k$ ულტრაფილტრი ისეთი, რომ $\uparrow y_k \in F_k$. $\forall U \in F_k$-თვის, $\uparrow y_k \cap U \neq \emptyset \Rightarrow y_k \in \downarrow U \Rightarrow$ $x \in \downarrow U, \forall U \in F_k \Rightarrow x \tilde{\in} F_k$. □

ლემა 3.4. თუ გვაქვს X ტოპოლოგიურ სივრცეზე ულტრაფილტრთა უსასრულო ოჯახი Σ, მაშინ ამ ოჯახის მეშვეობით ავაგებთ არამთავარ ულტრაფილტრს.

დამტკიცება. გვაქვს: $F_k \in \Sigma$, $k \in K$, K უსასრულოა, K სიმრავლეზე გვაქვს არამთავარი ულტრაფილტრი Φ. ავაგოთ ულტრაფილტრი, $\tilde{F} = \{U | \{k | U \in F_k\} \in \Phi\}$, ჯერ ვაჩვენოთ რომ $\tilde{F}$ ულტრაფილტრია, მართლა თუ ასეა ან U ან $int(X \backslash U)$ ეკუთვნის $\tilde{F}$-ს, ვთქვათ $U \notin \tilde{F} \Rightarrow S_U \equiv \{k | U \in F_k\} \notin \Phi \Rightarrow$ რადგან F_k ულტრაფილტრებია, $K \backslash S_U = \{k | int(X \backslash U) \in F_k\} \in \Phi \Rightarrow int(X \backslash U) \in \tilde{F}$.

ვაჩვენოთ რომ $\tilde{F}$ არამთავარი ულტრაფილტრია, თუ $\tilde{F}$ არამთავარია მაშინ $\bigcap_{U \in \tilde{F}} U = \emptyset$, დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $\bigcap_{U \in \tilde{F}} = \tilde{U} \neq \emptyset \Rightarrow \tilde{U} \in F_K = \{F_i | \tilde{U} \in F_i\}_{i \in I}$, კონსტრუქციიდან გამომდინარე I უსასრულოა. დავაფიქსიროთ რაიმე $j \in I$ და $O \in F_i$ ისეთი, რომ ყოველი $i \neq j$ $O \notin F_j$, აღვნიშნოთ $\tilde{O} = \bigcup_{O \in F_i} O, i \neq j$ ცხადია $\tilde{O} \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ და იგი $\tilde{U}$-ს საკუთრივი ქვესიმრავლეა რადგან $\tilde{O} \notin F_j \ni \tilde{U}$.

□

თეორემა 3.5. ალექსანდროვის X ტოპოლოგიური სივრცის გლისონის დაფარვა ალექსანდროვის ტოპოლოგიური სივრცეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $\forall x \in X$, როცა $x < y_k$, $k \in K$ ისეთი, რომ $\uparrow y_k \cap \uparrow y_j = \emptyset$, $k, j \in K$ სასრულია.

დამტკიცება. <u>აუცილებლობა</u>: დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ X ალექსანდროვის ტოპოლოგიური სივრცის გლისონის დაფარვა კვლავ ალექსანდროვის სივრცეა და $\exists x \in X$ ისეთი, რომ $x < y_k$, $k \in K$ და $\uparrow y_k \cap \uparrow y_j = \emptyset$, $k, j \in K$-თვის, K უსასრულო სიმრავლეა მაშინ X-ის გლისონის დაფარვა არ იქნება ალექსანდროვის სივრცე. 3.3-ის ძალით x არის უსასრულო რაოდენობა ულტრაფილტრების დაგროვების წერტილი. ყოველი y_k-თვის $k \in K$ $\exists F_k \ni \uparrow y_k$ ულტრაფილტრი,3.1-ს ძალით $x \tilde{\in} F_k$. 3.4-ს ძალით გვაქვს $\tilde{F}$ არამთავარი ულტრაფილტრი.

ავიღოთ გლისონის სივრცეში წერტილი $\tilde{F}_x$. ვაჩვენოთ რომ $\tilde{F}_x \in O$ ნებისმიერი $O \in \tau(\tilde{X})$ არსებობს უფრო მცირე ღია სიმრავლე ვიდრე O, მართლაც, აბსოლუტის აგების ხერხის გამო შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ, $O = O_U \cap \pi_X^{-1}(H)$ სადაც $H = \uparrow x$ რადგან x-ის მომცველი უმცირესი მიდამოა, ხოლო $U \in \tilde{F}$. $\tilde{F}$ არამთავარი ულტრაფილტრია, კონსტრუქციიდან გამომდინარე $I = \{i | U \in F_i\} \in \Phi \Rightarrow I = \{i | U \cap \uparrow y_i \neq \emptyset\}$

$$\bigcup_{i \in I} \uparrow_U y_i \subset U$$

$\bigcap_{i\in I} \uparrow_U y_i = \emptyset$ სადაც $\uparrow_U y = \uparrow y \cap U$. აღვნიშნოთ: $U' = \bigcup_{k\in I'} \uparrow_U y_k$, $I' \subset I$ ისეთი, რომ, I' და $I \backslash I'$ უსასრულო სიმრავლეა. აღვნიშნოთ: $U'' = \bigcup_{i\in I\backslash I'} \uparrow_U y_i$, $U' \cap U'' = \emptyset$ რადგან $\forall i, j \in I \uparrow y_i \cap \uparrow y_j = \emptyset$. $\tilde{F}$-ს ულტრაფილტრობის ძალით ან $U' \in \tilde{F}$ ან $U'' \in \tilde{F}$, ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ რომ $U' \notin \tilde{F}$, ე.ი. $\exists \psi$ ულტრაფილტრი ისეთი, რომ $U' \in \psi$ და x მისი დაგროვების წერტილია რადგან $x \leq y_i, \forall i \in I'$ მაშასადამე $\psi_x \in O$. რადგან $\tilde{F}$ ულტრაფილტრია $\exists V \in \tilde{F}$ ისეთი, რომ $V \notin \psi$, აღვნიშნოთ $U''' = V \cap U''$ მაშასადამე $\tilde{F}_x \in O_{U'''} \cap \pi_X^{-1}(H) \subset O_U \cap \pi_X^{-1}(H)$,$\psi_x \notin O_{U'''} \cap \pi_X^{-1}(H)$ მივიღეთ წინააღმდეგობა.

<u>საკმარისობა</u>: ვთქვათ $\forall x \in X$ როცა $y_k > x$, ისეთი, რომ $\forall i, j \in K$-თვის $\uparrow y_i \cap \uparrow y_j = \emptyset$, მაშინ K სასრული სიმრავლეა.

3.3-ის ძალით x არის სასრული რაოდენობა ულტრაფილტრების დაგროვების წერტილი. ვაჩვენოთ რომ $\forall \eta$ ულტრაფილტრისთვის რომლის დაგროვების წერტილიც არის x და η_x წერტილისთვის მოიძებნება უმცირესი მიდამო, მართლაც რადგან x არის სასრულ რაოდენობა ულტრაფილტრებს დაგროვების წერტილი, ყოველი $\psi \neq \eta$ ულტრაფილტრისთვის რომლის დაგროვების წერტილიც არის x, $\exists U \in \eta$ ისეთი, რომ $U \notin \psi$, განვიხილოთ ყველა ასეთი U-ების თანაკვეთა, აღვნიშნოთ W, რადგან სასრულია მათი რაოდენობა, ცხადია კვლავ ღია სიმრავლე იქნება და ეკუთვნის η ულტრაფილტრს, ესე იგი $x \in \downarrow W$, $\uparrow x \cap W \neq \emptyset$, შესაბამისად არსებობს ულტრაფილტრი რომელსაც ეს ღია სიმრავლე ეკუთვნის, მაგრამ რადგან $W \in \eta$ და სხვა არცერთ ულტრაფილტრს არ ეკუთვნის რომელის დაგროვების წერტილიც არის x, $\uparrow x \cap W \in \eta$, განვიხილოთ $O_{\uparrow x\cap W} \cap \pi_X^{-1}(\uparrow x)$, ცხადია $\eta_x \in O_{\uparrow x\cap W} \cap \pi_X^{-1}(\uparrow x)$, რადგან $\uparrow x \cap W$ ეკუთვნის მხოლოდ η ულტრაფილტრს, შესაბამისად $O_{\uparrow x\cap W} = \{\eta_z | z \in \bigcap_{U\in\eta} \overline{U}\}$, ხოლო $\forall \eta_y \in O_{\uparrow x\cap W} \cap \pi_X^{-1}(\uparrow x)$ ე.ი. $x \leq y$ და $y \in \bigcap_{U\in\eta} \overline{U}$, $\eta_x \leq \eta_y$.

□

შედეგი 3.1. ალექსანდროვის X ტოპოლოგიური სივრცის გლისონის დაფარვა კვლავ ალექსანდროვის სივრცეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ნებისმიერი წერტილის $x \in X$ წინარე სახე $\pi_X^{-1}(x)$ სასრული სიმრავლეა.

თეორემა 3.6. ალექსანდროვის X ტოპოლოგიური სივრცის გლისონის დაფარვა $\tilde{X}$ კვლავ ალექსანდროვის სივრცეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ნებისმიერი წერტილის $x \in X$ ზევით მდებარე უსასრულო ანტი ჯაჭვი S-თვის არსებობს $y_1, y_2 \in S$ ისეთი, რომ $\uparrow y_1 \cap \uparrow y_2 \neq \varnothing$.

დამტკიცება. <u>აუცილებლობა</u>:ვაჩვენოთ რომ თუ პირობა სრულდება მაშინ სრულდება თეორემა . პირობის ძალით ნებისმიერი წერტილი $x \in X$-თვის და ნებისმიერი ოჯახისთვის $(y_k)_{k\in K}$ ისეთი რომ $x \leq y_k$, $\forall k \in K$ და $\uparrow y_i \cap \uparrow y_j = \varnothing$, K სასრული სიმრავლეა, მაშასადამე სრულდება თეორემა 3.6.

<u>საკმარისობა</u>: ვთქვათ სრულდება პირობა, მაშინ სრულდება თეორემა , მაშასადამე ნებისმიერი წერტილი $x \in X$-სა და წერტილთა $(y_k)_{k\in K}$ ოჯახისათვის, ისეთის რომ $x \leq y_k$, $\forall k \in K$.

$\square$

თეორემა 3.7. ალექსანდროვის X ტოპოლოგიური სივრცის გლისონის დაფარვა კვლავ ალექსანდროვის სივრცეა მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $\forall x \in X, \downarrow\uparrow x \in R(X)$-თვის $\exists F_k \in R(X)$, ისეთი, რომ $\downarrow\uparrow x = \bigcup_{k\in K} F_k$ და $F_k \in R(X)$ არიან $R(X)$-ის ბულის ალგებრის ატომები და K სასრულია.

დამტკიცება. <u>აუცილებლობა</u>: პირობის თანახმად გვაქვს, ნებისმიერი $x \in X$, $\downarrow\uparrow x = \bigcup_{k\in K} F_k$, $F_k \in R(X)$, და $F_k = F_1 \cup F_2 \Rightarrow (F_1 = F) \vee (F_2 = F)$, მაშინ $k \in K \neq \varnothing$ სასრულია.

აღვნიშნოთ: $O_k = \uparrow x \cap F_k$, რადგან $F_k \in \downarrow\uparrow x, F_k \in R(X) \Rightarrow Int(F_k) \neq \varnothing \Rightarrow O_k \neq \varnothing$, ყოველ O_k-ში დავაფიქსიროთ რაიმე $y_k \in O_k$, ცხადია $x \leq y_k$. $\forall j, i \in K$, $\uparrow y_j \cap \uparrow y_k = \varnothing$ წინააღმდეგ შემთხვევაში $\exists U \subset \uparrow y_j \cap \uparrow y_k\ \uparrow y_j \backslash U \neq \varnothing \Rightarrow Int(F_j)\backslash U \neq \varnothing \Rightarrow \downarrow U \cup \downarrow(Int(F_j)\backslash U) = F_j$,მივიღეთ წინააღმდეგობა.

მაშასადამე მოვნახეთ $y_k \geq x$, $k \in K$ სასრულია $\forall j, k \in K$, $y_k \in O_k \subset F_K$ და $\uparrow y_j \cap \uparrow y_k = \varnothing$. თუ $\exists y_{k+1}$ ისეთი, რომ $x \leq y_{k+1}$ და $\uparrow y_{k+1} \cap \uparrow y_k = \varnothing\ \forall k \in K \Rightarrow$

$\exists F_{k+1} = \downarrow(\uparrow y_{k+1})$ ისეთი, რომ $F_{k+1} \subset \downarrow\uparrow x$ და $F_{k+1} \neq F_k, \forall k \in K$. 3.6-ს ძალით X სივრცის გლისონის დაფარვა კვლავ ალექსანდროვის სივრცეა.

საკმარისობა: თეორემა 3.6-ს ძალით $\forall x \in X$, როცა $x < y_k$, $k \in K$ ისეთი, რომ $\uparrow y_k \cap \uparrow y_j = \varnothing$, $k, j \in K$ სასრულია.

აღვნიშნოთ $F_k = \downarrow\uparrow y_k$, ვაჩვენოთ რომ $\forall F_k \in R(X)$, $k \in K$ -თვის და $\forall F_1, F_2 \in R(X)$ თუ $F_k = F_1 \cup F_2, F \Rightarrow (F_1 = F_k) \vee (F_2 = F_k)$, დავუშვათ საწინააღმდეგო მაშინ $\exists F_1, F_2 \in R(X)$ ისეთი, რომ $F_1 \neq F_{k'}, F_2 \neq F_{k'}$ და $F_{k'} = F_1 \cup F_2$ $\Rightarrow \downarrow\uparrow y_{k'} = F_1 \cup F_2$ დავაფიქსიროთ ორი წერტილი წერტილი $z_1 \in F_1 \backslash F_2$ და $z_2 \in F_2 \backslash F_1$ ცხადია $x \leq z_1, z_2$ და $\uparrow z_1 \cap \uparrow z_2 = \varnothing, \uparrow z_1, \uparrow z_2 \cap \uparrow y_i = \varnothing$ სადაც $i \in K \backslash k'$, მაშასადამე $y_{k'}$ ჩავანაცვლეთ ორი წერტილით, ამით მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ახლა ვაჩვენოთ რომ $F_k, k \in K$ -ს გარდა არ არსებობს F რომელიც აკმაყოფილებს პირობას. დავუშვათ საწინააღმდეგო $\exists F \in \downarrow\uparrow x$, $F \in R(X)$ და $F \neq F_k, \forall k \in K \Rightarrow \exists y \in F$ ისეთი, რომ $y \notin F_k, \forall k \in K \Rightarrow \uparrow y \cap \uparrow y_k = \varnothing, \forall k \in K$.

$\square$

თეორემა 3.8. ვთქვათ მოცემული გვაქვს X ალექსანდროვის ტოპოლოგიური სივრცე რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 3.6-ს, და შესაბამისი $\pi_X : \tilde{X} \to X$ ასახვა მისი გლისონის სივრციდან, მაშინ ეს ასახვა არის კოლოკალური ჰომეომორფიზმი.

დამტკიცება. განვიხილოთ X-ის აბსოლუტში $\forall \eta_x \in \tilde{X}$ წერტილი, რომელიც იქნება X სივრცეზე ნებისმიერი დაგროვებადი η ულტრაფილტრის ნებისმიერი დაგროვების წერტილი. ვაჩვენოთ, რომ $\downarrow\eta_x$ იქნება $\downarrow x$-ის ჰომეომორფული.

მართლაც, რადგან $\forall y \leq x$-თვის თუ $x \in \downarrow U \Rightarrow y \in \downarrow U \Rightarrow y \tilde{\in} \eta$ და $\eta_y \leq \eta_x$, და საპირისპიროდაც სწორია ლემა 3.2-დან გამომდინარე.

π_X ფუნქცის კონსტრუქციიდან გამომდინარე ცხადია სურიექცია გვაქვს $\downarrow\eta_x$-დან $\downarrow x$-ზე. $\forall \eta_{y_1}, \eta_{y_2} \leq \eta_x$-თვის $\pi_X(\eta_{y_1}) = y_1 \neq y_2 = \pi_X \eta_{y_2}$, ე.ი. π_X შეზღუდვა $\downarrow\eta_x$-ზე არის ინექცია და მაშასადამე ბიექცია.

ხოლო $\tilde{X}$ სივრცეზე მიღებული ტოპოლოგიის და π_X ფუნქცის კონსტრუქციიდან გამომდინარე, $\forall \eta_y \leq \eta_x$-თვის $\pi_X(\downarrow \eta_y) = \downarrow y$. მაშასადამე $\pi_x|_{\downarrow \eta_x}$ არის კოლოკალური ჰომეომორფიზმი.

$\square$

ლემა 3.9. ვთქვათ მოცემული გვაქვს X ალექსანდროვის ექსტრემალურად არაბმული ტოპოლოგიური სივრცე, მაშინ $X = \bigoplus F_i$ ისე რომ, $F_i \cap F_j = \varnothing$, $\forall i, j \in I$. სადაც $F_i \in R(X)$.

დამტკიცება. განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in X$ წერტილი, და მისი ბმულობის კომპონენტი C, დავუშვათ $C = F_1 \cup F_2$, და $\overline{Int(F_1 \cap F_2)} = \varnothing$ სადაც $F_1, F_2 \in R(X)$ ატომებია. მაშინ $Int(F_1 \cap F_2) = \varnothing$ აქედან გამომდინარე ნებისმიერი ღია $U_1 \subset F_1$ და $U_2 \subset F_2$ თვის $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

რადგან X ექსტრემალურად არაბმული ტოპოლოგიური სივრცეა $\overline{U_1}$ ღია-ჩაკეტილი სიმრავლეა, ამავდროულად $\overline{U_1}$ არის C საკუთრივი ქვესიმრავლე, მივიღეთ წინააღმდეგობა. ნებისმიერი ბმულობის კომპონენტი არის რეგულარულად ჩაკეტილი სიმრავლე.

$\square$

თეორემა 3.10. ვთქვათ მოცემული გვაქვს X ალექსანდროვის ტოპოლოგიური სივრცე რომელიც აკმაყოფილებს თეორემა 3.6-ს, და შესაბამისი $\pi_X : \tilde{X} \to X$ ასახვა მისი გლისონის სივრციდან. თუ გვაქვს რაიმე ექსტრემალურად არაბმული ალექსანდროვის Y სივრციდან უწყვეტი ასახვა $f : Y \to X$, მაშინ არსებობს უწყვეტი ასახვა $\pi : Y \to \tilde{X}$ ისეთი, რომ $\pi \circ \pi_X = f$.

დამტკიცება. წინადადება 1.11-ს ძალით Y წარმოდგება მისი ბმულობის კომპონენტების თანაუკვეთი გაერთიანებით ხოლო, ლემა 3.9-ის ძალით თითოეული ბმულობის კომპონენტი არის რეგულარულად ჩაკეტილი სიმრავლეთა ერთ-ერთი ატომი. ნებისმიერი $y \in Y$ წერტილისთვის ცხადია არსებობს ბმულობის კომპონენტი $C \subset Y$ ისეთი, რომ $y \in C$, მაშასადამე ნებისმიერი $y_1, y_2 \in C$ ისეთი რომ $y \leq y_1, y_2$ არსებობს $z \in C$ ისეთი რომ $y_1, y_2 \leq z$.

განვიხილოთ ნებისმიერი $y \in Y$, და მისი ზედასიმრავლის $f(\uparrow y)$ ანასახი. X სივრცეში არსებობს რეგულარად ჩაკეტილი ატომი $A \in R(X)$ ისეთი, რომ $f(\uparrow y) \subset A$.

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო ვთქვათ $f(\uparrow\ y) \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ და ნებისმიერი $i \in I$-თვის $f(\uparrow\ y) \not\subset A_i$ და ყოველი $A_i \in R(X)$ ატომია. განვიხილოთ ნებისმიერი A_j, A_k, დაშვებით არსებობს $y \leq y_j, y_k$ ისეთი, რომ $f(y_j) \in A_j$, $f(y_k) \in A_k$ და $f(y_j) \notin \bigcup_{I\setminus j} A_i$,$f(y_k) \notin \bigcup_{I\setminus k} A_i$ პირობით არსებობს $z \in A$ ისეთი რომ $y_j, y_k \leq z$, შესაბამისად f-ის უწყვეტობიდან გამომდინარე $f(y_j), f(y_k) \leq f(z)$ აქედან კი ვასკვნით რომ $f(z) \notin A_k$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ე.ი. არსებობს ატომი $A \in R(X)$ ისეთი რომ $f(\uparrow y) \subset A$ აქიდან კი f-ის უწყვეტობით და A-ს ჩაკეტილობით $f(\downarrow\uparrow y) \subset A$.

ყოველი A ატომი არის რეგულარულად ჩაკეტილ $R(X)$ სიმრავლეზე A ულტრაფილტრის წარმომქმნელი, ხოლო ლემა [Jonstone, Gleason cover of a topos I, 3.1]-ს ძალით გვაქვს მისი შესაბამისი ღიების ულტრაფილტრი η_A.აღვნიშნოთ $\tilde{A} = \{\eta_{A_x} | x \tilde{\in} \eta_A\}$. განვსაზღვროთ π ფუნქცია შემდეგნაირად, $\pi(y) = \pi_X^{-1}(f(y)) \cap \tilde{A}$. შესაბამისად ყოველი $y \in Y$-თვის $\pi_(y) = \pi_X^{-1}(f(y)) \cap \tilde{A} = \eta_{A_{f(y)}}$.

ვაჩვენოთ π ფუნქციის მონოტონურობა, ყოველი $y_1, y_2 \in Y$ როცა $y_1 \leq y_2$, $f(y_1) \leq f(y_2)$ გვაქვს $\pi(y_1) = \pi_X^{-1}(f(y_1)) \cap \tilde{A} = \eta_{A_{f(y_1)}} \leq \eta_{A_{f(y_2)}} = \pi_X^{-1}(f(y_2)) \cap \tilde{A} = \pi(y_2)$.

ცხადია ნებისმიერი ნებისმიერი $y \in Y$-თვის $f(y) = \pi_X(\pi(y)) =$
$\pi_X(\pi_X^{-1}(f(y)) \cap \tilde{A}) = \pi_X((\eta_A)_{f(y)}) = f(y)$.

□

ლიტერატურა

[1] Владимир Михайлович Ульянов. О бикомпактных расширениях счетного характера и абсолютах. Математический сборник, 98(2 (10)):223--254, 1975.

[2] Леонид Борисович Шапиро. Об абсолютах топологических пространств и непрерывных отображений. Доклады Академии наук, 226(3):523--526, 1976.

[3] Vakhtang Abashidze. Absolute for finite T_0 spaces. Master thesis, Saint Andrew the First-Called Georgian University of the Patriarchate of Georgia, 2016.

[4] B Banaschewski. Projective covers in categories of topological spaces and topological algebras. General topology and its relations to modern analysis and algebra, pages 63--91, 1971.

[5] A Błaszczyk. Extremally disconnected resolutions of T_0-spaces. Colloquium Mathematicum, 1(32):57--68, 1974.

[6] Jürgen Flachmeyer z. Z. Topologische projektivräume. Mathematische Nachrichten, 26(1-4):57--66, 1963.

[7] Andrew M Gleason et al. Projective topological spaces. Illinois Journal of Mathematics, 2(4A):482--489, 1958.

[8] Stavros D Iliadis. Absolutes of hausdorff spaces. Doklady Akademii Nauk, 149(1):22--25, 1963.

[9] L. Rudolf J. Mioduszewski. H-closed and extremally disconnected hausdorff spaces. Dissertationes Mathematicae, 66, 1969.

[10] Peter T. Johnstone. Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium: Volumes 1 and 2. Number 43 in Oxford Logic Guides. Oxford Science Publications, 2002.

[11] Jack R Porter and R Grant Woods. Extensions and absolutes of Hausdorff spaces. Springer Science & Business Media, 1988.