ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

გიორგი გოგნაძე

ჰარმონიული ანალიზის ძირითადი პრინციპები

(დოქტორანტის სემინარი)

ხელმძღვანელი: თსუ ასოც. პროფ.
ფიზ. მათ. მეცნ. დოქტორი
თეიმურაზ ახობაძე

2020 წელი

ს ა რ ჩ ე ვ ი

შესავალი

ნადვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მრავალი საკითხი დაკავშირებულია ინტეგრების და დიფერენცირების ოპერაციებთან. ამ მიმართულების ერთ-ერთ მნიშნელოვან შედეგს წარმოადგენს ლებეგის თეორემა ინტეგრალის დიფერენცირებადობის შესახებ. ინტეგრალის გაწარმოება მოხერხებულია ჩავატაროთ მაქსიმალურ ფუნქციის ტერმინებში. თვითონ ტერმინი, მაქსიმალური ფუნქცია, წარმოიშვა ამ საკითხების კვლევის დროს და მისი თვისებები გამოიხატება სუსტი უტოლობებით. ასევე მნიშნელოვანია თეორემები დაფარვების შესახებ. ამ მეთოდს აღწერს კალდერონისა და ზიგმუნდის დეკომპოზიცია, რომელსაც ქვემოთ ჩამოვაყალიბებთ. ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის ერთ-ერთ ძირითად საკითხს წარმოადგენს მარცინკევიჩის საინტერპოლაციო თეორემა და ბანახის უწყვეტობის პრინციპი, რომლის მეშვეობითაც ვამტკიცებთ მრავალ მნიშნელოვან დებულებას.

§1 კალდერონის და ზიგმუნდის ინტერვალის დეკომპოზიცია

ამ თავში განვიხილავთ ჰარმონიული ანალიზის ძალიან მნიშნელოვ საკითხს, ინტეგრარული ფუნქციის კალდერონონის და ზიგმუნდის ინტერვალის დეკომპოზიციის შესახებ. უხეშათ რომ ვთქვათ, ეს პრინციპი საშუალებას გვაძლევს ინტეგრაბადი ფუნქცია წარმოვადგინოთ ორი ფუნქციის ჯამის სახით: $f = g + b$, სადაც g არის „კარგი ნაწილი“, (არსებითად შემოსაზღვრული), ხოლო b „ცუდი ნაწილი“ („ჩაქრობის“ თვისებით) რომლის საშუალო შემოსაზღვრულია T -ს რაღაც ღია, თანაუკვეთ ქვეინტერვალთა ოჯახის მიმართ.

პირველ რიგში ვიგულისხმოთ, რომ f არის არაუაყოფითი ფუნქცია; წიააღმდეგ შემთხვევაში ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მიღებული შედეგი $|f|$-სათვის, რომელიც f შეიძლება იყოს ნებისმიერი ნამდვილი ან კომპლექსურ ცვლადის ფუნქცია. დავუშვათ $\lambda > 0$ რიცხვი აღემატება f_T -ს, რომელიც არის f -ის საშუალო T -ზე, ე.ი.

$$\frac{1}{2\pi}\int_T f(y)dy < \lambda .$$

ჩვენ განვიხილავთ T -ს ორობით ქვეინტერვალთა ისეთ ოჯახს, რომლის ყოველი ინტერვალი მიიღება T -ს ტოლი ღია ქვეინტერვალებად დაყოფით. ამრიგად, T -ს პირველი დანაწილება შედგება $T_1 = (-\pi, 0)$ და $T_2 = (0, \pi)$ ინტერვალებისაგან. შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{1}{2}\left(f_{T_1} + f_{T_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{T_1} f(y)dy + \frac{1}{\pi}\int_{T_2} f(y)dy\right) = f_T < \lambda .$$

ამიტომ ერთ-ერთი f_{T_1} ან f_{T_2} საშუალოთაგან არ აღემატება λ -ს. ასევე

$$f_{T_i} \le \frac{2}{2\pi}\int_T f(y)dy < 2\lambda , \quad i = 1, 2$$

ასე რომ, თუ რომელიმე საშუალო მნიშნელობა აღემატება λ -ს, ის მაინც რჩება შემოსაზღვრული 2λ . ჩვენ შეგვიძლია ამორჩევის პროცესი გავაგრძელოთ. იმ შემთხვევაში თუ საშუალო მნიშნელობა f -ის ქვეინტერვალებზე არ აღემატება λ -ს, მაშინ ჩვენ გავაგძელებთ ამ ინტერვალის დაყოფას. მეორე მხვრივ, თუ f -ის საშუალო ინტევრვალზე აღემარება λ -ს, მაშინ დავყოთ ეს ინტერვალი და დავარქვათ მას I_1 . ცხადია,

$$\lambda < \frac{1}{|I_1|}\int_{I_1} f(y)dy = f_{I_1} < 2\lambda .$$

დავუშვათ, რომ k ნაბიჯის შემდეგ $I_1, I_2, ..., I_n$ დაყოფა. $\{I\}$ ინტერვალები, რომლებიც არ არის სახელშეცვლილი და ამ ეტაპზე დაყოფილი, აქვთ $f_I < \lambda$ თვისება. ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია

ყოველი I ამ ოჯახიდან შეგვიძლია განვიხილოთ T-ს როლში და ის დავყოთ ორ ტოლ, ღია ქვეინტერვალად. f-ს საშუალო მნიშნელობა ყოველ ასეთ ინტერვალზე არ აღემატება 2λ-ს. ამიტომ სულ მცირე ერთ-ერთ მათგანზე მაინც ის არ აღემატება λ. $\{I\}$-ს ის ინტერვალები, რომლებზეც f-ის საშუალო აღემატება λ-ს და შემოსაზღვრულია 2λ-თი აღინიშნება $I_{n+1},...,I_m$-ად და დაიყოფა. ეს ის ინტერვალებია, რომლებსაც $(k+1)$ ნაბიჯზე მიიღება. შერჩევის ეს პროცესი წარმოშობს T-ს ღია, თანაუკვეთ, ორობით ქვეინტერვალთა $\{I_j\}$ სიმრავლეს, შემდეგი თვისებებით: ყოველი j-სთვის

(1.1) $$\lambda < \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)\,dy < 2\lambda$$

და

(1.2) $$\sum_j |I_j| \le \frac{1}{\lambda}\sum_j \int_{I_j} f(y)\,dy \le \frac{1}{\lambda}\int_T f(y)\,dy.$$

ამის გარდა, თუ დავუშვებთ, რომ $\Omega = \bigcup I$, მაშინ სამართლიანია შემდეგი: თითქმის ყველა $x \in T\setminus\Omega$-თვის არსებობს $\Im = \{I\}$ მიმდევრება, რომელიც შედგება T-ს ორობითი ინტერვალებისგან და კრებადია x-სკენ, ამასთნავე

(1.3) $$\frac{1}{|I|}\int_I f(y)\,dy < \lambda, \quad \text{ყოველი } I \in \Im.$$

ცხადია, **(1.3)** სრულდება თითქმის ყველგან $T\setminus\Omega$-ში, რადგან ეს უაკნასკნელი არ არის აუცილებელი შესრულდეს ისეთ წერტილებში (როგორიცაა 0), რომლებიც არის T-ს ქვეინტერვალების საზღვრის წერტილები.

$\{I_j\}$ ოჯახს უწოდებენ ინტერვალის λ დონის კალდერონის და ზიგმუნდის დეკომპოზიციას. ნახსენები f და g ფუნქციების ვადგენთ, რომ

(1.4) $$g(x) = f(x)\chi_{T\setminus\Omega}(x) + \sum_j f_{I_j}\chi_{I_j}(x)$$

და $b(x) = f(x) - g(x)$. ცხადია, რომ $b(x) = 0$, Ω-დან,

(1.5) $$\int_{I_j} b(x)\,dx = 0, \quad \text{ყოველი } j\text{-სთვის.}$$

ამასთან,

(1.6) $$\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |b(x)|\,dx = \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} \left| f(x) - f_{I_j} \right| dx \le 4\lambda, \quad \text{ყოველი } j\text{-სთვის.}$$

რაც შეეხება g-ს, ნათელია, რომ

(1.7) $$g(x) \le 2\lambda, \text{ როცა } x \in \Omega.$$

(1.3)-დან ცხადია რომ g შესაფასებლად $T \setminus \Omega$-ზე , საჭიროა განვიხილოთ f -ის საშუალოს ყოფაქცევა. ამისათვის საჭიროა შევისწავლოთ ჰარდისა და ლიტვუდის მაქსიმალური ფუნქცია, რომლის შესახებ საუბარი იქნება შემდეგ თავში.

§2 ჰარდისა და ლიტვუდის მაქსიმალური ფუნქცია

დავუშვათ f არის ინტეგრებადი, პერიოდული ფუნქცია , განსაზღვრული T -ზე და

$$Mf\left(x\right)=\sup_{I}\frac{1}{|I|}\int_{I}\left|f\left(y\right)\right|dy,$$

სადაც სუპრემუმი აიღება ყოველ იმ ღია I ინტერვალთა $\Im=\{I\}$ ოჯახის მიმართ, რომელთა ცენტრია x და რომელთა სიგრძე არ აღემატება 2π -ს.

ცხადია, რომ $Mf\left(x\right)$ არის ქვემოდან უწყვეტი ე.ი. $\Theta_{\lambda}=\left\{x\in T:Mf\left(x\right)>\lambda\right\}=\left\{Mf>\lambda\right\}$, არის ღია ყოველი $\lambda>0$-თათვის. მართლაც, ვთქვათ $\{x_n\}$ არის წერტოლთა მიმდევრობა $T\setminus\Theta_{\lambda}$-ში, რომელიც კრებდია x -სკენ; უნდა ვაჩვენოთ, რომ $x\in T\setminus\Theta_{\lambda}$. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ყოველი ინტერვალისთვის $I=\left(x-\eta,x+\eta\right)$, $0<\eta\le\pi$ სამართლიანია

$$\frac{1}{|I|}\int_{I}\left|f\left(y\right)\right|dy\le\lambda.$$

დავუშვათ $I_n=\left(x_n-\eta,x_n+\eta\right)$ და $f_n\left(y\right)=f\left(y\right)\chi_{I_n\Delta I}\left(y\right)$, სადაც $I_n\Delta I=\left(I_n\setminus I\right)\cup\left(I\setminus I_n\right)$ არის სიმეტრიული სახვაობა. თუ გავითვალიწინებთ, რომ $\left|f_n\left(y\right)\right|\le\left|f\left(y\right)\right|$, $\lim_{n\to\infty}f_n\left(y\right)=0$, მაშინ და ლებეგის თეორემის (მაჟორანტის კრებადობის შესახებ [2]) თანახმად მივიღებთ

(2.1)
$$\frac{1}{|I|}\int_{I}\left|f_n\left(y\right)\right|dy\to0,\text{ როცა } n\to\infty.$$

ამასთან, $x_n\in T\setminus\Theta_{\lambda}$ -თვის

(2.2)
$$\frac{1}{|I|}\int_{I_n}\left|f\left(y\right)\right|dy=\frac{1}{|I_n|}\int_{I_n}\left|f\left(y\right)\right|dy\le\lambda,\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

ახლა (2.2)-დან ვიღებთ

$$\frac{1}{|I|}\int_{I}\left|f\left(y\right)\right|dy\le\frac{1}{|I|}\int_{I_n\Delta I}\left|f\left(y\right)\right|dy+\frac{1}{|I|}\int_{I_n}\left|f\left(y\right)\right|dy\le$$

$$\le\frac{1}{|I|}\int_{I}\left|f_n\left(y\right)\right|dy+\lambda.$$

ამრიგად, თუ დავუშვებთ, რომ $n \to \infty$ და გავითვალიწინებთ (2.1)-ს გავქვს $\frac{1}{|I|}\int_I \left| f(y) \right| dy \le \lambda$.

რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

ამრიგად, $Mf(x)$ დადებითი ზომადი ფუნქცია, მაგრამ არის თუ არა ინტეგრებადი? მარტივი მაგალითი გვიჩვენებს, რომ ეს არ არის აუცილებელი. მართლაც, ვთქვათ $f(y) = \chi_{(0,1/2)}(y)(d/dy)(1/\ln(1/y))$. მაშინ $f(y) \ge 0$ და $f \in L(T)$. თუ $x \in (-1/2, 0)$, მაშინ

$$Mf(x) \ge \frac{1}{2\eta}\int_{(x-\eta,x+\eta)} f(y)\,dy \text{ , ყოველ } \eta > 0$$

კერძოდ, თუ დავუშვებთ $\eta = 2|x|$, გვექნება

$$Mf(x) \ge \frac{1}{4|x|}\int_{(0,|x|)} f(y)\,dy = \frac{1}{4|x|}\frac{1}{\ln(1/|x|)},$$

ე.ი. ეს ფუნქცია 0 წერტილის მიდამოში არ არის ინტეგრებადი.

იმისათვის რომ გავუმკლავდეთ ამ „უხერხულობას“, შემოვიღო სუსტი-L ($wk - L(T)$) მარცინკევიჩის კლასი. ვიტყვით, რომ ზომადი $f(x)$ ფუნქცია არის $wk - L(T)$ კლასში თუ არსებობს ისეთი მუდმივი c ისეთი, რომ

(2.3) $$\lambda\left|\{x \in T : |f(x)| > \lambda\}\right| = \lambda\left|\{|f| > \lambda\}\right| \le c, \quad \text{ყოველი } \lambda > 0\text{-სთვის.}$$

(2.3)-ში c მუდმივების ინფიმნუმს უწოდებენ f -ის „ $wk - L(T)$ ნორმას“, მიუხედავად იმისა, რომ ეს უკანასკნელი არ აკმაყოფილებს ნორმის თვისებებს. ჩებიშევის უტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ ინტეგრებადი ფუნქცია f არის $wk - L(T)$-ში, რომლის ნორმა არ აღემატება $\|f\|_1$. მეორე მხვრივ, ფუნქცია $f(x) = (1/x)\left(\chi_{(0,1)}(x)\right) \in wk - L(T)$, მიუხედავად იმისა, რომ ის არ არის ლოკალურად ინტეგრებადი 0 წერტილის მიდამოში.

ახლა ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ ჰარდი-ლიტვუდის მაქსიმალური თეორემა კერძოდ, სამართლიანია

თეორემა 2.1 ვთქვათ, $f \in L(T)$, მაშინ $Mf \in wk - L(T)$ და Mf ფუნქციის $wk - L$ ნორმა $72\pi\|f\|_1$-ს არ აღემატება. უფრო ზუსტად,

(2.4) $$\lambda\left|\{Mf > \lambda\}\right| \le 36\int_T |f(y)|\,dy \text{ , ყოველი } \lambda > 0\text{-სთვის.}$$

დამტკიცება. რადგან $Mf(x) = M(|f|)(x)$, ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ f არის არაუარყოფითი ფუნქცია. ამის გარდა, რადგან $\lambda\left|\{Mf > \lambda\}\right| \le \lambda 2\pi$, ყოველი λ-თათვის,

ამიტომ ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\left(1/2\pi\right)\int\limits_T f\left(y\right)dy \le \lambda/18$, წინააღმდეგ შემთხვევაში დასამტკიცებელი არაფერია.

ვთქვათ, $f_T \le \lambda/18$, ეს უკანასკნელი საშუალებას გვაძლევს განვიხილოთ კალდერონის და ზიგმუნდის ინტერვალის $\lambda/18$ დონის დეკომპოზიციით. ამ შემთხვევაში გვაქვს $\left\{I_j\right\}$ ოჯახი ღია, თანაუკვეთი, T-ს ორობითი ქვეინტერვალები და g და b ფუნქციები, რომელთაგანაც $f = g + b$. მათთვის სამართლიანია (1.1)-(1.7) თვისებები. ცხადია, რომ M არის ნახევრადადიციური ასახვა, ე.ი. $M\left(f_1 + f_2\right)\left(x\right) \le Mf_1\left(x\right) + Mf_2\left(x\right)$ და, შესაბამისად,

(2.5) $$M\left(f\right)\left(x\right) \le Mg\left(x\right) + Mb\left(x\right), \quad \text{ყოველი } x \in T\text{-სთვის.}$$

ყოველი I_j ინტერვალისთვის, $2I_j$-თი აღვნიშნოთ I_j-ს კონცენტრირებული ინტერვალი, რომლის სიგრძე ზომით ორჯერ მეტია ვიდრე I_j-ს ზომაზე. საბოლოოდ ავიღოთ $\Omega^* = \cup_j 2I_j$. (2.5)-ის მეშვეობით ჩვენ შეგვეძლია ვაჩვენოთ, რომ

(2.6) $$M\left(f\right)\left(x\right) \le \lambda, \quad x \in T \setminus \Omega^*.$$

თუ ეს ასე, მაშინ $\left\{Mf > \lambda\right\} \subset \Omega^*$ და (1.2)-ის ძალით

$$\lambda\left|\left\{Mf > \lambda\right\}\right| \le \lambda\sum_j \left|2I_j\right| = 2\lambda\sum_j \left|I_j\right| \le$$

$$\le 2\lambda\frac{18}{\lambda}\int\limits_T f\left(y\right)dy = 36\int\limits_T f\left(y\right)dy,$$

რისიც დამტკიცება გვინდოდა.

ამრიგად, დაგვრჩა დასამტკიცებელი (2.6). ვთქვათ, I არის ინტერვალი რომლის ცენტრია $x \in T \setminus \Omega^*$; ვაჩვენოთ, რომ

$$\frac{1}{\left|I\right|}\int\limits_I \left|b\left(y\right)\right|dy \le \frac{16\lambda}{18}.$$

ეს არც ისე რთულია. ვინაიდან $b = 0$, Ω-ს გარეთ, ამიტომ მივიღებთ

$$\int\limits_I \left|b\left(y\right)\right|dy = \sum_j \int\limits_{I \cap I_j} \left|b\left(y\right)\right|dy,$$

სადაც ჯამი ვრცელდება მხოლოდ ისეთ j-ებზე რომლებისთვისაც $I \cap I_n \ne \varnothing$. ჩვენ ასეთ I_j-ებს ვყოფთ ისეთ ურთიერთგამომრიცხვავ სიმრავლეებად, რომ

(i) $\left|I \cap I_j\right| \ge \left|I_j\right|/2$ (ასეთ ინტერვალს უწოდებთ $I^{(1)}$-ს)

და

(ii) $\left|I\cap I_j\right|<\left|I_j\right|/2$ (ასეთ ინტერვალს უწოდებთ $I^{(2)}$-ს).

$I^{(1)}$-სთვის ნათელია, რომ

(2.8)
$$\frac{\left|I\cap I_j\right|}{\left|I\cap I_j\right|}\int_{I\cap I_j}\left|b(y)\right|dy\leq 2\frac{\left|I\cap I_j\right|}{\left|I_j\right|}\int_{I_j}\left|b(y)\right|dy\leq$$
$$\leq 4\frac{\left|I\cap I_j\right|}{\left|I_j\right|}\int_{I_j}\left|f(y)\right|dy\leq 8\left(\frac{\lambda}{18}\right)\left|I\cap I_j\right|.$$

$I^{(2)}$-სთვის $x\in T\setminus\Omega^*$. რადგან $x\notin 2I_j$, ყოველი j-სთვის, ამიტომ $\left|I\cap I_j\right|\geq\left|I_j\right|/2$. ამრიგად,

(2.9)
$$\int_{I\cap I_j}\left|b(y)\right|dy\leq\frac{\left|2I\cap I_j\right|}{\left|2I\cap I_j\right|}\int_{\left|2I\cap I_j\right|}\left|b(y)\right|dy\leq$$
$$\leq\frac{2\left|2I\cap I_j\right|}{\left|I_j\right|}\int_{I_j}\left|b(y)\right|dy\leq\frac{8\left|I\cap I_j\right|}{\left|I_j\right|}\int_{I_j}\left|f(y)\right|dy\leq$$
$$\leq 16(\lambda/18)\left|2I\cap I_j\right|.$$

მაშასადამე (2.8) და (2.9) შეფასებებიდან გვექნება

$$\frac{1}{|I|}\int_{I}\left|b(y)\right|dy\leq\sum_j\frac{1}{|I|}\int_{I\cap I_j}\left|b(y)\right|dy\leq$$
$$\leq 16\left(\frac{\lambda}{18}\right)\sum_j\frac{\left|I\cap I_j\right|}{\left|I_j\right|}\leq\frac{16\lambda}{18},$$

რაც ზუსტად არის (2.7). რადგან (2.7)-ში I ნემისმიერია, ამიტომ:

(2.10)
$$Mb(x)\leq 16\lambda/18,\quad x\in T\setminus\Omega^*.$$

ახლა ისევ I ინტერვალისთვის ცენტრით x-ში, შევაფასოთ $\left(1/|I|\right)\int_I g(y)dy$. g ფუნქციის **(1.4)** განსაზღვრებიდან ადვილად გამომდინარეობს, რომ

$$\int_I g(y)dy=\sum_{j,I\cap I_j\neq\varnothing}\frac{\left|I\cap I_j\right|}{\left|I_j\right|}\int_j f(y)dy+\int_{I\setminus\Omega}f(y)dy=A_1+A_2.$$

ასევე (1.1)-დან გვაქვს

(2.11)
$$A_1\leq 2\left(\frac{\lambda}{18}\right)\sum_j\left|I\cap I_j\right|.$$

A_2-ის შეფასებისათვის ჩვენ კვლავ მივმართავთ გეომეტრიულ მიდგომას. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ საკმარისია განვიხილოთ ინტეგრალი ღია სიმრავლეზე $I \setminus \cup \bar{I}_j \subset I$. ეს სიმრავლე შეიძლება ჩავწეროთ როგორც თვლადი, თანაუკვეთი ღია ინტერვალების J_k გაერთიანება. თითოეული J_k ისეთია რომ $\bar{J}_k$ არ შეიცავს I საზღვრის წერტილებს (შეიძლება ორი მათგანს) თავისმხვრივ თ.ყ. თანაუკვეთი ინტერვალები, ორობითი ქვეინტერვალები $J_{k,n}$, T სიმრავლის, რომლებიც მიიღბა კალდერონ-ზიგმუნდის დეკომპოზიციის მეთოდით. ამრიგად (1.1)-დან ვიღებთ

(2.12)
$$\frac{1}{|J_{k,n}|}\int_{J_{k.n}} f(y)\,dy \le \frac{\lambda}{18} \quad \text{ყოველი } j,n\text{-სთვის.}$$

მეორე მხვრივ, თუ $\bar{J}_{k,n}$ შეიცავს I-ს ბოლო წერტილებს, მაშინ დავუშვათ, რომ n ისეთი მთელირიცხვია, რომ $\left(2\pi/2^{n+1}\right) \le |J_k| < \left(2\pi/2^n\right)$. მაშინ, $J_k \subset J_{k,1} \cup J_{k,2}$, სადაც $J_{k,i}$ თანაუკვეთი, T-ს ორობითი ქვეინტერვალები, რომლის თითოეულის ზომა $\le 2\pi/(2n+1)$, და რომლებიც არ დანაწილდენ კალდერონის და ზიგმუნდის დეკომპოზიციის მეთოდით. მაშინ მივიღებთ

(2.13)
$$\int_{J_k} f(y)\,dy \le \int_{J_{k,1}} f(y)\,dy + \int_{J_{k,2}} f(y)\,dy \le$$
$$\le (\lambda/18)\left(|J_{k,1}| + |J_{k,2}|\right) < (\lambda/18)\,2|J_k|.$$

და თუ გავაერთიანებთ (2.12) და (2.13) შეფასებებს, ადვილად მივიღებთ

(2.14)
$$A_2 \le 2(\lambda/18)\left|I \setminus \bigcup_j I_j\right|.$$

ამრიგად, თუ შევკრებთ **(2.11)** და **(2.14)** მივიღბთ

$$\int_I g(y)\,dy \le 2\left(\frac{\lambda}{18}\right)\left(\sum_j |I \cap I_j| + |I \setminus I_j|\right) \le$$
$$\le 2(\lambda/18)|I|.$$

რადგან I არის ნებისმიერი, ამიტომ ამ შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ

(2.15)
$$Mg(x) \le 2(\lambda/18), \quad \text{ყოველი } x \in T.$$

საბოლოოდ თუ (2.5) მარჯვენა მხარეს შევაფასებთ (2.10) და (2.15)-ის გამოყენებით, რომ

$$Mf(x) \le 16\lambda/18 + 2\lambda/18 = \lambda, \quad x \in T \setminus \Omega^*,$$

რაც ზუსტად ემთხვევა (2.6). ■

ჰარდისა და ლიტვუდის მაქსიმალური თეორემას საინტერესო შედეგს წარმოადგენს ლებეგის თეორემა, დიფერენცირებადობის შესახებ (რომელიც გამოგვადგება (1.3) მარჯვენა

მხარის შესაფასებლად). შევნიშნოთ რომ ჩვენ არსებითად გვჭირდება „არ ა ცენტრალური" ვერსია. მოდიშევეხოთ ამ საკითხს. ვთქვათ, მოცემულია არა ცენტრალური მაქსიმალური ფუნქცია $\tilde{M}f(x)$ განსაზღვრული შემდეგი ტოლობით

$$\tilde{M}f(x) = \sup \frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|dy$$

სადაც I -ები არის ღია ინტერვალი სიგრძით $\leq 2\pi$ და რომელიც შეიცავს x წერტილს. ადვილი დასანახია, რომ $\tilde{M}f(x)$ არის ქვემოდან ნახევრადუწყვეტი და მაშასადამე, ზომადი. ამის გარდა ჰარდისა და ლიტვუდის მაქსიმალური თეორემიდან ასევე მიიღება, რომ $\tilde{M}f(x) \in wk - L(T)$ ნორმით $\leq 216\pi \|f\|_1$. ეს მარტივი დასანახია რადგან, x-ს შემცველ ყოველ $I_x = \left(x - \frac{3}{2}|I|, x + \frac{3}{2}|I|\right)$ ინტერვალი მოიცავს I -საც. მაშასადამე

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|dy \leq \frac{|I_x|}{|I|}\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} |f(y)|dy \leq 3Mf(x),$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\tilde{M}f(x) \leq 3Mf(x)$. ამრიგად, $\{\tilde{M}f > \lambda\} \subset \{Mf > \lambda/3\}$ და საძიებელი შეფასება გამომდინარეობს (2.4)-დან. ახლა ჩვენ შეგვიძლია ჩავოვაყალობოთ და დავამტკიცოთ

თეორემა 2.2 **(ლებეგის თეორემა დიფერენციადობის შესახებ).** ვთქვათ, $f \in L(T)$. ყოველი $x \in T$ ვიგულისხმოთ, რომ $\wp_x = \{I_x\}$ არის ღია ინტერვალების ოჯახი, რომელიც მოიცავს x -ის, ამასთან I_x -ები იჭიმება x -სკენ, როგორც $|I_x| \to 0$. მაშინ

$$\lim_{|I_x|\to 0} \frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} f(y)dy = f(x) \quad \text{თ.ყ. } T\text{ -ში.}$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ f არის ნამდვლ მნიშნელობიანი ფუნქცია. ცხადია ასევე რომ ეს შედეგი სამართლიანია ტრიგონომეტრიული პოლინომებისთვისაც, მაშასადამე f უწყვეტი ფუნქციაა. ასეთი ფუნქციები მკვრივია $L(T)$-ში, და ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ f არის ნამდვილი მნიშნელობიანი ფუნქცია (იხილე შენიშვნა 2.5 თავი II), ვთქვათ,

$$\phi(f,x) = \limsup_{|I_x|\to 0} \frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} f(y)dy - \liminf_{|I_x|\to 0} \frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} f(y)dy \geq 0.$$

ნათლია, რომ $\phi(f,x) = \phi(f-p,x)$ ყოველი ნამდვილ მნიშნელობიანი ტრიგონომეტრიული p პოლინომისთვის. ამის გარდა, $\phi(g,x) \leq 2\tilde{M}g(x)$ უტოლობიდან, მივიღებთ $\phi(f,x) \leq 2\tilde{M}(f-p)(x)$, ყოველი $x \in T$ -სთვის. მაშასადამე, ყოველი $\lambda > 0$, $\{\phi(f) > \lambda\} \subset \{\tilde{M}(f-p) > \lambda/2\}$, და თეორემა (2.1)-ის გამოყენებით

(2.16) $$\left|\left\{\phi(f)>\lambda\right\}\right| \le (c/\lambda)\|f-p\|_1 .$$

რადგან (2.16)-ის მარჯვენა მხარე შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ მცირე, მივიღებთ, რომ $\left|\left\{\phi(f)>\lambda\right\}\right|=0$ ყოველი $\lambda>0$. ეს თავის მხვრივ ნიშნავს, რომ თ.ყ. $x\in T$ -სათვის

$$\limsup_{|I_x|\to 0}\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} f(y)\,dy=\liminf_{|I_x|\to 0}\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} f(y)\,dy ,$$

და, მაშასადამე, $\lim_{|I_x|\to 0}\left(1/|I_x|\right)\int_{I_x} f(y)\,dy$ არსებობს თ.ყ. $x\in T$ -თათვის. ადვილი დასანახია, რომ ეს ზღვარი ტოლია $f(x)$ თ.ყ. მართლაც, $\lambda>0$ -თვის ავიღოთ

$$\upsilon_f(\lambda)=\left\{x\in T:\left|\lim_{|I_x|\to 0}\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} f(y)\,dy-f(x)\right|>\lambda\right\}.$$

კვლავ ნებისმიერი ტრიგონომეტრიული p პოლინომისათვის, გვექნება

$$\left|\lim_{|I_x|\to 0}\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} f(y)\,dy-f(x)\right|\le$$

$$\le \lim_{|I_x|\to 0}\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x}\left|f(y)-p(y)\right|dy+\left|p(x)-f(x)\right|\le$$

$$\le \tilde{M}(f-p)(x)+\left|p(x)-f(x)\right| .$$

მაშასადამე

$$\upsilon_f(\lambda)\subset\left\{\tilde{M}(f-p)>\lambda/2\right\}\cup\left\{|p-f|>\lambda/2\right\}=$$

$$\upsilon_{f,1}+\upsilon_{f,2} .$$

სათანადოდ შერჩეული p -სათვის (როგორც ზევით იყო ნაცვენები), გვექნება, რომ $\left|\upsilon_{f,1}\right|$ შეგვიძლია გავხადოთ ნებისმიერად მცირე. მაგრამ ანალოგიური შეფასება სრულდება $\upsilon_{f,2}$ -სთვის ვინაიდან ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით გვაქვს

$$\left|\upsilon_{f,2}\right|\frac{\lambda}{2}\le\int_T\left|f(x)-p(x)\right|dx=2\pi\|f-p\|_1 .$$

საიდანაც $\left|\upsilon_f(\lambda)\right|=0$ ყოველი $\lambda>0$ და

$$\lim_{|I_x|\to 0}\int_{|I_x|} f(y)\,dy=f(x),\quad \text{თ.ყ. } T\text{ -ში.} \quad \blacksquare$$

თეორემა 2.2. შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ ერთ-ერთი მარტივი ფორმით შემდეგნაირად. ვთქვათ, $\chi(t)$ არის $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ინტერვალის მახასიათებელი ფუნქცია და ვიგულისხმოთ $\chi_\varepsilon(t)=(2\pi/\varepsilon)\chi(t/\varepsilon)$. მაშინ

(2.17)
$$f*\chi_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\pi}\int_T f(x-t)\chi_\varepsilon(t)dt=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{|t|<\varepsilon/2} f(x-t)dt\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(x) \quad \text{თ.ყ.}$$

კერძოდ, თუ f არის არაუარყოფითი (და ზოგად შემთხვევაში f შეგვიძლია ჩავანაცვლოთ $|f|$-ით), მაშინ $\sup\limits_{0<\varepsilon<2\pi}|f*\chi_\varepsilon|\le \tilde{M}f(x)$. ისმის ბუნებრივი კითხვა: რა მოთხოვნებია საჭირო ნებისმიერ გულზე, რომ კვალ სრულდებოდეს (2.17) პირობა. კონკრეტული მაგალითებად (რასაც ჩვენ ვგულისმობთ) შეიძლება განვიხილოთ გულები, რომლებიც მსგავსია ფეიერის K_n გულების. ასევე, შევნიშნოთ, რომ დირიხლეს D_n გულისათვის ეს მოსაზრება არ არის სამართლიანი, რადგან ის ნიშანს არ ინარჩუნებს და, რაც მთავარია, $\|D_n\|_1\to\infty$, როცა $n\to\infty$. უფრო ზუსტად, ისმის კითხვა $\mathbb{R}$-ზე ინტეგრებადი ϕ ფუნქციისათვის განხილულ, ამ პირობებში თ.ყ. $x\in T$-თათვის გვაქვს თუ არა

(2.18)
$$\lim_{n\to\infty}\int_T f(x-t)n\phi(nt)dt=\left(\int_{\mathbb{R}}\phi(t)dt\right)f(x)?$$

თეორემა (2.2)-ის დამტკიცება გვაჩვენებს, რომ (2.18)-ზე დადებითი პასუხი დამოკიდებულია ϕ-ს შემდეგ ორ, თვისებაზე:

(i) $\sup\limits_n\left|\int_T f(x-t)n\phi(nt)dt\right|\in wk-L(T)$, როცა $f\in L(T)$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_T f(x-t)n\phi(nt)dt=\left(\int_{\mathbb{R}}\phi(t)dt\right)f(x)$, $L(T)$-ში f გლუვ გუნქციათ მკვრივ სიმრავლეზე.

(ii) არ მოითხოვს ϕ ფუნქციის თვისებების შემდგომ დაზუსტებას, თუ შემოვიფარგლებით მხოლოდ ტრიგონომეტრიული პოლინომებით. მართლაც, ინტეგრალის წრფივობის გამო ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(t)=e^{ijt}$. ამ შემთხვევაში

$$\int_{(-\pi,\pi]} e^{ij(x-t)}n\phi(nt)dt=e^{ijt}\int_{\mathbb{R}}\chi_{(-n\pi,n\pi]}(t)e^{-ijt/n}\phi(t)dt\,.$$

თუ საინტეგრაციო ფუნქციას ავღნიშნავთ $\phi_n(t)$-ით მაშინ ადვილასდ დავასკნით, რომ $|\phi_n(t)| \le |\phi(t)|$ და $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(t) = \phi(t)$ თ.ყ.; მაშასადამე, ლებეგის მაჟორანტად კრებადობის თეორემის ძალით [2] მივიღებთ (ii)-ს.

იმისათვის რომ დავამტკიცოთ (i), საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ განსახილველი sup მაჟორირდება $wk-L$ ფუნქციით, უკანასკნელი საჭიროებს შესაბამის დებულებას.

დებულება 2.3 ვთქვათ, ϕ არის ინტეგრებადი ფუნქცია $\mathbb{R}$-ზე. ამასთანავე, ვიგულისხმოთ, რომ მას აქვს არაზრდადი, ლუწი, და ინტეგრებადი η მაჟორანტი. უფრო ზუსტად,

$$\phi(t) \le \eta(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

სადაც η არის ლუწი, $\int\limits_{\mathbb{R}} \eta(t)\,dt < \infty$ და $\eta(s) \ge \eta(t)$, $0 < s < t$. მაშინ

$$\sup_n \left| \int\limits_T f(x-t)\, n\phi(nt)\, dt \right| \le \left(4\int\limits_{\mathbb{R}} \eta(t)\, dt \right) Mf(x).$$

დამტკიცება. ცხადია, რომ

(2.19)
$$\left| \int\limits_T f(x-t)\, n\phi(nt)\, dt \right| \le \int\limits_T \left| f(x-t) \right| n\eta(nt)\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} n \int\limits_{\pi/2^{k+1}<|t|<\pi/2^k} \left| f(x-t) \right| n\eta(nt)\, dt \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} n\eta\left(nt/2^{k+1}\right) \int\limits_{|t|\le \pi/2^k} \left| f(x-t) \right| dt = \sum_{k=0}^{\infty} A_k .$$

შევნიშნოთ, რომ A_k ინტეგრალი შემოსაზღვრული სიდიდით

$$\frac{2\pi}{2^k} \frac{2^k}{2\pi} \int\limits_{|t|\le \pi/2^k} \left| f(x-t) \right| dt \le \frac{2\pi}{2^k} Mf(x).$$

აქედან გამომდინარე

$$A_k \le \left(2\pi/2^k\right) n\eta\left(n\pi/2^{k+1}\right) Mf(x), \text{ ყოველი } k, n, x .$$

მაშასადამე, k მიმართ აჯამვით მივიღებთ

(2.20)
$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \le 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n\pi}{2^k} \eta\left(n\eta/2^{k+1}\right) \right) Mf(x).$$

ამის გარდა, რადგან

$$t\eta(t) \le 2 \int_{(t/2,t]} \eta(s)\,ds, \quad t \ge 0,$$

ამიტომ (2.20) გამოსახულების მარჯვენა ჯამი თანაბრად n-ის მიმართ შემოსაზღვრული სიდიდეა

(2.21)
$$8\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\left(n\pi/2^{k+1},\, n\pi/2^{k}\right]} \eta(s)\,ds \le 4\int_{\mathbb{R}} \eta(s)\,ds,$$

ჩვენი დასკვნა გამომდინარეობს (2.19)-(2.21) შეფასებების შეჯამებით. ■

შედეგი 2.4 დებულება 2.3 პირობებში $f \in L(T)$ სამართლიანია

$$\lim_{n\to\infty} \int_T f(x-t)\,n\phi(nt)\,dt = \left(\int_R \phi(t)\,dt\right) f(x), \quad \text{თ.ყ. } x \in T.$$

ამ შედეგის მნიშვნელობიდან გამომდინარე, ცალკე ჩამოვაყალიბოთ მისი ერთ-ერთი შედეგი

დებულება 2.5. ვთქვათ, $f \in L(T)$ და დაუშვათ $\sigma^*(f,x) = \sup_n \left|\sigma_n(f,x)\right|$, მაშინ $\sigma^*(f) \in wk - L(T)$ და

$$\lambda\left|\left\{\sigma^*(f) > \lambda\right\}\right| \le c\|f\|_1, \quad \text{ყოველი } \lambda > 0.$$

დამტკიცება. გამომდინარეობს 2.3 დებულებიდან. ■

§3 კალდერონისა და ზიგმუნდის დეკომპოზიცია

ახლა ჩვენ შეგვიძლია დავუბრუნდეთ კალდერონისა და ზიგმუნდის დეკომპოზიციას ინტეგრებადი f ფუნქცისათვის და ის ჩამოვაყალიბოთ განსაკუთრებით სასარგებლო ფორმით.

თეორემა 3.1 **(კალდერონისა და ზიგმუნდის დეკომპოზიცია λ დონის მიმართ).** ვთქვათ $f \in L(G)$ და $\lambda > (1/2\pi)\int_T |f(t)|dt$, მაშინ არსებობს $\{I_j\}$ ღია, თანაუკვეთი, T-ს ისეთი ორობითი ქვეინტერვალები, რომ

(3.1) $$f(x) \le \lambda, \quad \text{თ.ყ. } x \in T \setminus \cup I_j$$

(3.2) $$\lambda \le \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |f(y)|dy \le 2\lambda, \quad \text{ყოველი } j\text{-სთვის.}$$

თუ $\Theta_\lambda = \Omega = \cup I_j$, მაშინ

(3.3) $$|\Omega| \le \frac{1}{\lambda}\int_\Omega |f(y)|dy .$$

ამის გარდა, თუ

(3.4) $$g(x) = f(x)\chi_{T\setminus\Omega}(x) + \sum_j \left(\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)dy\right)\chi_{I_j}(x)$$

და

(3.5) $$b(x) = \sum_j \left(f(x) - \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} f(y)dy\right)\chi_{I_j}(x),$$

მაშინ $f(x) = g(x) + b(x)$; სადაც g არის “კარგი“ ფუნქცია, ხოლო b “ცუდი“ ფინქციაა. b ფუნქციას უწოდებენ f ფუნქციის კალდერონისა და ზიგმუნდის λ დონის დეკომპოზიციას ამ უკანასკნელს აქვს შემდეგი თვისებები:

(3.6) $$|g(x)| \le 2\lambda, \quad \text{თ.ყ. } x \in T,$$

(3.7) $$\|g\|_p \le (2\lambda)^{p-1}\|f\|_1, \quad 1 \le p < \infty,$$

და

(3.8) $$\int_{I_j} b(y)\,dy = 0, \quad \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |b(y)|\,dy \le \frac{2}{|I_j|}\int_{I_j} |f(y)|\,dy;$$

(3.9) $$\|b\|_1 \le 2\|f\|_1 .$$

დამტკიცება . იმ შედეგების გათვალისწინებით, რომლებიც მიღებულია პირველ პარაგრაფში, დარჩა დასამტკიცებელი (3.6) და (3.7), რომლებიც გამომდინარეობს (3.6)-დან. g -ს განსაზღვრებიდან მივიღებთ $|g(x)| \le 2\lambda$, $x \in \Omega$. ამიტომ უნდა ვაჩვენოთ, რომ შეფასება ასევე სრულდება თ.ყ. $T \setminus \Omega$-ზე. ეს უკანასკნელი მაშინვე გამომდინარეობს ლებეგის თეორემიდან დიფერენციბადობის შესახებ(იხილე თეორემა 2.2) ვინაიდან $T \setminus \Omega$-დან თითქმის ყველა x -ს ეთანადება x -ის შემცველი ღია ორობითი $\{I_x\}$ ინტერვალთა მიმდევრობა, რომელიც იჭიმება x -კენ ($|I_x| \to 0$) ისე, რომ

$$\frac{1}{|I_x|}\int_{I_x} |f(y)|\,dy < \lambda, \quad \text{ყველა } I_x \text{-სათვის.}$$

მაშასადამე, $|f(x)| \le \lambda$ თ.ყ. $x \in T \setminus \Omega$-თვის. ამიტომ ასეთი x -ებისათვის $f(x) = g(x)$ რაც ნიშნავს შედეგის დამტკიცებას.

§4 მარცინკევიჩის საინტერპოლაციო თეორემა

ჰარდისა და ლიტვუდის მაქსიმალური Mf ოპერატორი ასახავს $L(T)$-ს $wk-L(T)$-ში. ის ასახავს $L^{\infty}(T)$-ს თავის თავში, ნორმით 1. მართლაც,

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|dy \le \|f\|_{\infty}, \quad \text{ყოველი } I \subset T .$$

ბუნბრივია ისმის კითხვა: რა შეგვიძლია ვთქვათ Mf-ის ყოფაქცევაზე $L^p(T)$ ფუნქციებისათვის $1<p<\infty$? ეს ფუნქციები ინტეგრებადია, Mf არის კორექტულად განსაზღვრული და არის $wk-L$ კლასიდან. ამის გარდა, რა შეიძლება ითქვას ამ ფუნქციების შესახებ? მოხერხებულია ეს საკითხი განვიხილოთ ზოგად კონტექსტში. წინასწარ განვიხილოთ ზოგიერთი განსაზღვრება.

ვიტყვით რომ $f \to Tf$ არის ნახევრად წრფივი, თუ $T(f_1+f_2)$ და $T(cf_1)$ არის კორექტულად განსაზღვრული ყოველთვის, როცა $T(f_1)$ და $T(f_2)$ განსაზღვრულია, c არის სკალარი და

(4.1) $$|T(f_1+f_2)(t)| \le |Tf_1(t)|+|Tf_2(t)|, \quad \text{თ.ყ.}$$

და

(4.2) $$|T(cf_1)(t)| \le |c||Tf_1(t)|, \quad \text{თ.ყ.}$$

ასეთ, T ოპერატორს უწოდებენ ძლიერ (p,p), $1\le p\le\infty$, ტიპის მქონეს, თუ T ასახვა განსაზღვრულია $L^p(T)$-ში და რაიმე f-გან დამოუკიდებელი c მუდმივისათვის

(4.3) $$\|Tf\|_p \le c\|f\|_p .$$

(4.3)-ში უმცირეს მუდმვს ეწოდება L^p-ში შემოსაზღვრული ასახვის ნორმა. ანალოგიურად, T ოპერატორს უწოდებენ სუსტ (p,p) ტიპსს , $1\le p\le\infty$, თუ ეს ასახვა განსაზღვრულია L^p-ში და f-გან დამოუკიდებელი c მუდმივისათვის

(4.4) $$\lambda^p\left|\{|Tf|>\lambda\}\right| \le c^p\|f\|_p^p, \quad \text{ყოველი } \lambda>0 .$$

(4.4)-ში უმცირეს c მუდმივს უწოდებენ T-ს სუსტი ტიპის ნორმას. ამ ოპერატორს უწოდებენ სუსტი (p,p) ტიპის ოპერატორს.

ვთქვათ, f ზომადია და კომპლესრმნიშნელობიანია. დავუშვათ $L^{p_0}(T)+L^{p_1}(T)=$
$=\{f : f=f_0+f_1,\ f_0\in L^{p_0}(T),\ f_1\in L^{p_1}(T)\}$ და ნორმა არის

(4.5) $$\|f\|_{L^{p_0+p_1}}=\inf\left\{\|f_0\|_{p_0}+\|f_1\|_{p_1}\right\},$$

სადაც ინფენუმი აიღება ყოველ ისეთ $f_0\in L^{p_0}(T)$, $f_1\in L^{p_1}(T)$ წყვილზე, რომლისთვისაც $f=f_0+f_1$; მაშინ $L^{p_0}+L^{p_1}$ ასევე არის ბანახის სივრცეც. ანალოგიურად, $L^{p_0}(T)\cap L^{p_1}(T)$-ში შემოგვაქვს ნორმა

(4.6) $$\|f\|_{L^{p_0}\cap L^{p_1}}=\max\left(\|f_0\|_{p_0},\|f_1\|_{p_1}\right),$$

რის შედეგაც $L^{p_0}\cap L^{p_1}$ ხდება ბანახის სივრცე.

ჩვენ დამტკიცებას დავიწყებთ შერეული სუსუტი-ძლიერი ტიპით მარცინკევიჩის საინტერპოლაციის თეორემით.

თეორემა 4.1. ვთქვათ, ნახევრად წრფივი ოპერატორი T განსაზღვრულია $L^{p_0}+L^{p_1}$-ში და ამავდროულად არის სუსტი (p_0,p_0) ტიპის ნორმით $\le c_0$ და (p_1,p_1) ტიპის ნორმით, $1\le c_1$, $1\le p_0<p_1\le\infty$. ვთქვათ, $p_0<p<p_1$ და $1/p=(1-\eta)/p_0+\eta/p_1$, $0<\eta<1$, მაშინ T ასევე არის (p,p) ტიპის ნორმით $\le c\left(1/(p-p_0)^{(1-\eta)/p_0}\right)c_0^{1-\eta}c_1^{\eta}$, სადაც c არის აბსოლუტური მუდმივი $\le 8e^{1/e}$ რომელიც დამოუკიდებული T-ზე.

დამტკიცება. g ფუნქციის ნორმის გამოსათვლელად ჩვენ გამოვიყენებთ წარმოდგენას

(4.7) $$2\pi\|g\|_p^p=p\int_{[0,\infty)}\lambda^{p-1}\left|\{|g|>\lambda\}\right|d\lambda$$

რომელიც ადვილად მიიღება შემდეგი გამოსახულებიდან, თუ გამოვიყენებთ ტონელის თეორემას

$$\int_T|g(t)|^p\,dt=\int_T\int_{[0,|g(t)|]}d\lambda^p dt.$$

უპირველესად შევნიშნოთ, რომ T არის კორექტულად განსაზღვრული L^p-ში, რადგან, როგორც ადვილი დასანახია, განვიხილავთ, რა L^p-ის ფუნქციის დიდ და მცირე მნიშნელობებს, დავასკვნით, რომ $L^p\subset L^{p_0}+L^{p_1}$. ეს მსჯელობა ჩვენ კერძო შემთხვევაში არ არის აუცილებელი, რადგან ქვემოთ მდებარე სივრცე არის სასრული ზომის და, მაშასადამე, $L^p\subset L^{p_0}$. მიუხედავად ამისა, ჩვენ ვარჩევთ განვიხილოთ უსასრულო ზომის შემთხვევა. მაშასადამე, თუ $f\in L^p$, მაშინ $f=f_0+f_1$, $f_i\in L^{p_i}, i=0,1$ და ნახევრად ადიციურობის გამო

(4.8) $$|Tf(t)|\le|Tf_0(t)|+|Tf_1(t)|\quad \text{თ.ყ.}$$

ვიგულისხმოთ, რომ $p_1=\infty$, ვინაიდან ეს არის ყველაზე მარტივი შემთხვევა. (4.8)-დან $\lambda>0$-სათვის გამომდინარეობს,

(4.9) $$\{|Tf|>\lambda\}\subseteq\{|Tf_0|>\lambda/2\}\cup\{|Tf_1|>\lambda/2\}.$$

ამის გარდა, რადგან $\|Tf_1\|_\infty\le c_1\|f_1\|_\infty$ ამიტომ მეორე სიმრავლე (4.9)-ის მარჯვენა მხარეში ცარიელია, მოვითხოვთ რა

(4.10) $$\|f_1\|_\infty\le\lambda/2c_1.$$

ეს გულისხმობს იმას, რომ ჩვენ სინამდვილეში განვიხილეთ $f_{0,\lambda}+f_{1,\lambda}$ დეკომპოზიცია λ პარამეტრით. (4.10)-დან ვასკვნით, რომ ბუნებრივია განვიხილოთ

(4.11) $$f_{1,\lambda}(t)=\begin{cases}f(t),\ |f(t)|\le\lambda/2c_1\\(\lambda/2c_1)\operatorname{sgn}f,\ |f(t)|>\lambda/2c_1\end{cases}$$

და $f_{0,\lambda}(t)=f(t)-f_{1,\lambda}(t)$. (4.9), (4.11)-დან და სუსტი ტიპის შეფასებიდან გამომდინარეობს, რომ

(4.12) $$\left|\{|Tf|>\lambda\}\right|\le\left|\{|Tf_{0,\lambda}|>\lambda/2\}\right|\le(2/\lambda)^{p_0}c_0^{p_0}\|f_{0,\lambda}\|_{p_0}^{p_0}\le$$

$$\le\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_0}c_0^{p_0}\left(\int_{\{|f|>\lambda/2c_1\}}|f(t)|^{p_0}\,dt+\left(\frac{\lambda}{2c_1}\right)^{p_0}\left|\left\{|f|>\frac{\lambda}{2c_1}\right\}\right|\right)$$

$$\le(2c_0)^{p_0}\lambda^{-p_0}\left(\int_{\{|f|>\lambda/2c_1\}}|f(t)|^{p_0}\,dt+\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{p_0}\left|\left\{|f|>\frac{\lambda}{2c_1}\right\}\right|\right)$$

ტონელის თეორემის გამოყენებით და (4.7), (4.12)-დან ვასკვნით

(4.13) $$2\pi\|Tf\|_p^p=p\int_{[0,\infty)}\lambda^{p-1}\left|\{|Tf|>\lambda\}\right|d\lambda\le$$

$$\le p(2c_0)^{p_0}\int_{[0,\infty)}\lambda^{p-p_0-1}\left(\int_{\{|f|>\lambda/2c_1\}}|f(t)|^{p_0}\,dt\right)d\lambda+$$

$$+\left(\frac{c_0}{c_1}\right)^{p_0}p\int_{[0,\infty)}\lambda^{p-1}\left|\{|f|>\lambda/2c_1\}\right|d\lambda=$$

$$=p(2c_0)^{p_0}\int_T|f(t)|^{p_0}\int_{[0,2c_1|f(t)|]}\lambda^{p-p_0-1}d\lambda dt+$$

$$+2^p\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^p\int_T|f(t)|^p\,dt\le$$

$$\le\frac{2p2^p}{p-p_0}c_0^{p_0}c_1^{p-p_0}\int_T|f(t)|^p\,dt.$$

ამრიგად, 2π-ზე გაყოფით (4.13)- დან მივიღებთ

(4.14) $$\|Tf\|_p \le 4p^{1/p}\frac{1}{(p-p_0)^{1/p}}c_0^{p_0/p}c_1^{c-p_0/p}\|f\|_p .$$

მაგრამ თუ გავითვალისწინებთ, რომ $p_0/p = 1-\eta$, $1-p_0/p=\eta$ და $p^{1/p}\le e^{1/e}$, $1<p<\infty$, მაშინ (4.14) მიიღებს შემდეგ სახეს

(4.15) $$\|Tf\|_p \le c\frac{1}{(p-p_0)^{(1-\eta)/p_0}}c_0^{1-\eta}c_1^{\eta}\|f\|_p ,$$

$c\le 4e^{1/e}$ დამოუკიდებულია მხოლოდ f-გან და T-გან. დასახილველი შემთხვევა დამტკიცებულია .

დავუშვათ, რომ $p_1<\infty$. ვთქვათ, $f=f_{0,\lambda}+f_{1,\lambda}$, მაშინ (4.11) გამოყენების ნაცვლად ჩვენ გვაქავს

(4.16) $$f_{1,\lambda}(t)=\begin{cases} f(t), \ |f(t)|\le\varepsilon\lambda \\ (\lambda/2c_1)\operatorname{sgn} f, \ |f(t)|>\varepsilon\lambda \end{cases}$$

სადაც ε არის ჯერ კიდევ ასარჩევი, $f_{0,\lambda}=f-f_{1,\lambda}$. (4.10)-დან ნათელია, რომ

(4.17) $$2\pi\|Tf\|_p^p \le p\int\limits_{[0,\infty)}\lambda^{p-1}\left|\left\{|Tf_{0,\lambda}|>\lambda/2\right\}\right|d\lambda+$$

$$+p\int\limits_{[0,\infty)}\lambda^{p-1}\left|\left\{|Tf_{1,\lambda}|>\lambda/2\right\}\right|d\lambda=$$

$$I_0+I_1 .$$

I_0 შეფასებისათვის გამოვიყენოთ წინა მსჯელობა, მაშინ ადვილად დავასკვნით, რომ

(4.18) $$I_0\le 2^p\frac{p2^p}{p-p_0}c_0^{p_0}\varepsilon^{p-p_0}2\pi\|f\|_p^p$$

I_1 შეფასებისათვის შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქცია

(4.19) $$\phi(s,\lambda)=\int\limits_{[0,s]}u^{p_1-1}\left|\left\{|Tf_{1,\lambda}|>\frac{u}{2}\right\}\right|du$$

ნათელია, რომ $t>0$-სათვის

$$\left.\frac{\partial\phi(s,\lambda)}{\partial s}\right]_{s=t}=t^{p_1-1}\left|\left\{|Tf_{1,\lambda}|>\frac{t}{2}\right\}\right|.$$

ამ აღნიშნებში გვაქვს

$$I_1=p\int\limits_{[0,\infty)}\lambda^{p-p_1}\left.\frac{\partial\phi(s,\lambda)}{\partial s}\right]_{s=\lambda}d\lambda ,$$

სადაც ზედა ტოლობის ნაწილობითი ინტეგრებით ადვილად გამომდინარეობს

(4.20) $$I_1 = p\lambda^{p-p_1}\phi(\lambda,\lambda)\Big]_0^{\infty} - p\int_{[0,\infty)}\phi(\lambda,\lambda)\,d\lambda^{p-p_1} = J + K.$$

ჩვენ შევაფასებთ თითოეულ წევრს ცალ-ცალკე. დავიწყოთ J წევრის შეფასებით. დავუშვათ $J(\lambda) = p\lambda^{p-p_1}\phi(\lambda,\lambda)$, ვინაიდან $J(0)\geq 0$, ამიტომ ქვედა ზღვარი შეგვიძლია უგულვებელვყოთ. რაც შეეხება $J(\infty)$-სა, ნათელია, რომ

(4.21) $$\phi(\lambda,\lambda) = \int_{[0,\lambda)} u^{p_1-1}\left|\left\{\left|Tf_{1,\lambda}\right| > \frac{u}{2}\right\}\right| du =$$

$$= 2\pi\left(2^{p_1}/p_1\right)\left\|Tf_{1,\lambda}\right\|_{p_1}^{p_1} \leq 2\pi\left(2^{p_1}/p_1\right)c_1^{p_1}\left\|f_{1,\lambda}\right\|_{p_1}^{p_1}.$$

მაშასადამე,

(4.22) $$J(\lambda) \leq 2\pi p(2c_1)^{p_1}\int_{\{|f|\leq\varepsilon\lambda\}}|f(t)|^{p_1}\,dt \Big/ p_1\lambda^{p_1-p}$$

და საბოლოოდ

(4.23) $$J \leq c\limsup_{\lambda\to\infty}\int_{\{|f|\leq\varepsilon\lambda\}}|f(t)|^{p_1}\,dt \Big/ \lambda^{p_1-p}.$$

ვაჩვენოთ, რომ (4.23)-ის მარჯვენა, მხარე არის 0. ჩვენ გვაქვს ორი შემთხვევა: როცა $f \in L^{p_1}$ და როცა $f \not\in L^{p_1}$. პირველ შემთხვევაში (4.23)-ის მრიცხველი შემოსაზღვეულია λ-თი. ამასთანავე მნიშნელი მიისწრაფის ∞-კენ, λ-თან ერთად. ამრიგად, ზღვარი არის 0. მეორე შემთხვევაში, როცა $f \not\in L^{p_1}$ (4.23)-ის წარმოდგენა არის $\frac{\infty}{\infty}$ სახის განუზღვრელობა (როცა, $\lambda\to\infty$) ცხადია, გამოსაყენებელი იქნება ლოპიტალის წესი. (4.23)-ის მრიცხველი შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$c\int_{[0,\varepsilon\lambda]} u^{p_1-1}\left|\{|f|>u\}\right| du$$

და გასახილველი ზღვარი ტოლფასია

$$c\lim_{\lambda\to\infty}\frac{(\varepsilon\lambda)^{p_1-1}\left|\{|f|>\varepsilon\lambda\}\right|\varepsilon}{\lambda^{p_1-p-1}} = c\lim_{\lambda\to\infty}(\varepsilon\lambda)^p\left|\{|f|>\varepsilon\lambda\}\right|.$$

მაგრამ ეს გამოსახულება 0 ტოლია ვინაიდან ჩებიშევის უტოლობის გამოყენებით

(4.24) $$(\varepsilon\lambda)^p\left|\{|f|>\varepsilon\lambda\}\right| \leq \int_{\{|f|>\varepsilon\lambda\}}|f(t)|^p\,dt.$$

და (4.24) გამოსახულების მარჯვენა მხარე მიისწრაფის 0, როცა $\lambda\to\infty$ ყოველთვის, როცა $f\in L^p$.

დაგვრჩა შესაფასებელი K. (4.21)-ის გათვალისწინებით

(4.25) $$K \le -2\pi p\left(\frac{2c_1}{p_1}\right)^{p_1}\int\limits_{[0,\infty)}\int\limits_{\{|f|\le\varepsilon\lambda\}}\left|f(t)\right|^{p_1}dtd\lambda^{p-p_1} =$$

$$= -2\pi p\left(\frac{2c_1}{p_1}\right)^{p_1}\int\limits_{T}\left|f(t)\right|^{p_1}\int\limits_{[|f(t)|/\varepsilon,\infty)}d\lambda^{p-p_1}dt =$$

$$= 2\pi p\left(\frac{2c_1}{p_1}\right)^{p_1}\int\limits_{T}\left|f(t)\right|^{p}\left(\frac{|f(t)|}{\varepsilon}\right)^{p-p_1}dt =$$

$$= p\left(\frac{2c_1}{p_1}\right)^{p_1}\varepsilon^{p_1-p}2\pi\|f\|_p^p .$$

(4.17), (4.18), (4.20) და (4.25) გათვალისწინებით საბოლოოდ ვიღებთ

(4.26) $$\|Tf\|_p^p \le p\left(2^p\left(\frac{2c_0}{p-p_0}\right)^{p_0}\varepsilon^{p_0-p}+\left(\frac{2c_1}{p_1}\right)^{p_1}\varepsilon^{p_1-p}\right)\|f\|_p^p$$

ახლა ავარჩიოთ ε ისე, რომ (4.26) ორივე შესაკრები იყოს ერთმანეთის ტოლი, ამრიგად,

$$\varepsilon = 2^{p/(p_1-p_0)}\frac{1}{2}\left(c_0^{p_0}p_1/c_1^{p_1}(p-p_0)\right)^{1/(p_1-p_0)}$$

და შესაბამისად მუდმივი მარჯვენა მხარეში არ აღემატება

$$cp^{\frac{1}{p}}\frac{1}{(p-p_0)^{\frac{1}{p}\frac{p_1-p}{p_1-p_0}}p_1^{\frac{1}{p}\frac{p-p_0}{p_1-p_0}}}c_0^{\frac{p_0}{p}\frac{p_1-p}{p_1-p_0}}c_1^{\frac{p_1}{p}\frac{p-p_0}{p_1-p_0}} \quad \blacksquare$$

დებულება 4.2. ვთქვათ, ϕ არის ინტეგრებადი ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს 2.3 დებულების პირობებს და ვთქვათ, $F(x)=\sup\limits_n\left|\int\limits_T f(x-t)n\phi(nt)dt\right|$, მაშინ

$$\|F\|_p \le \frac{c}{(p-1)^{1/p}}\|f\|_p, \quad 1<p<\infty .$$

დამტკიცება. გამოვიყენოთ თეორემა 4.1. როცა $p_0=1$, $p_1=\infty$. $\blacksquare$

თეორემა (მარცინკევიჩი) 4.3. ვთქვათ ნახევრად წრფივი ოპერატორი T განსაზღვრულია $L^{p_0}+L^{p_1}$-ზე და ამავდროულად არის სუსტი (p_0,p_0) და (p_1,p_1) ტიპების ნორმით $\le c_0, c_1$. თუ $p_0<p<p_1$ და $1/p=(1-\eta)/p_0+\eta/p_1$, $0<\eta<1$, მაშინ T არის (p,p) ნორმით

$$\le c\frac{1}{(p-p_0)^{(1-\eta)/p_0}}\frac{1}{(p-p_0)^{\eta/p_1}}c_0^{1-\eta}c_1^{\eta},$$

სადაც c არის აბსოლიტური კონსტანტა.

დამტკიცება. დამტკიცება იდენტურია და შედარებიდ ადვილია ვიდრე თეორემა 4.3, რადგან

$Tf_{1,\lambda}$ შესაფასებლად ვიყენებთ შემდეგ ფაქტს

$$\left|\left\{\left|Tf_{1,\lambda}\right| > \lambda / 2\right\}\right| \leq \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{p_1} c_1^{p_1} \int_{\{|f|<\varepsilon\lambda\}} \left|f(t)\right|^{p_1} dt . \quad \blacksquare$$

§5 ექსტრაპოლაცია და ზიგმუნდის $L\ln L$ კლასები

ადვილად დასახასიათებელია ნახევრად წრფივი T ოპერატორები, რომლებიც ერთდროულად არის სუსტი $(0,0)$ ტიპის და (∞,∞) ტიპის. ამის დასარწმუნლებად განვიხილოთ

დებულება 5.1. ნახევრად წრფივი ოპერატორი T, რომელიც განსაზღვრულია $L+L^{\infty}$-ზე ერთდროულად არის სუსტი $(1,1)$ ტიპის და (∞,∞) ტიპის მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს მუდმივები c_1, c_2 ისეთი, რომ ყოველი $f\in L+L^{\infty}$ და $\lambda>0$-სათვის

(5.1) $$\left|\{|Tf|>\lambda\}\right|\le\frac{c_1}{\lambda}\int_{[\lambda/c_2,\infty]}\left|\{|f|>t\}\right|dt.$$

ამ შემთხვევაში c_1 და c_2 შემოსაზღვრავს T-ს სუსტ ნორმას, შესაბამისად, $(1,1)$ და (∞,∞) ტიპებისათვის.

დამტკიცება. საკმარისობა გამომდინარეობს (4.12)-დან. აუცილებლობის დასამტკიცებლად შევნიშნოთ, რომ თუ (5.1) სამართლიანია და $f\in L(T)$, მაშინ სუსტი ტიპის მტკიცებულება გამომდინარეობს (5.1)-დან თუ მასში ინტეგრალის ქვედა საზღვარს შევცვლით 0-ით. ასევე, თუ $f\in L^{\infty}(T)$, მაშინ $\left|\{|f|>t\}\right|=0$, როცა $t\ge\|f\|_{\infty}$, და ინტეგრალი ნული ხდება, როცა $\lambda\ge c_2\|f\|_{\infty}$. მაშასადამე, იგივე სამართლიანია $\left|\{|Tf|>\lambda\}\right|$ და $\|Tf\|_{\infty}\le c_2\|f\|_{\infty}$-თვის. ■

მიუხედავად იმისა, რომ (5.1) ექვივალენტურია სუსტი $(1,1)$ ტიპის და (∞,∞) ტიპის, ასევე, ის შეიცავს დამატებით ინფორმაციას Tf-ის ინტეგრადობის შესახებ. ეს ინფორმაცია, რომელიც ფაქტობრივად „ექსტრაპოლირდება“ (5.1)-დან, საშუალებას გვაძლებს დავადგინოთ რა პირობრზშია Tf ინტეგრებადი. ცხადია, $Tf\in L(T)$, როცა $f\in\bigcup_{p>1}L^{p}(T)$, ისმის კითხვა ეს უკანასკნელი ოპტიმალური? პასუხი უარყოფითია, და ზუსტი პასუხის გასაცემად შემოგვაქვს ზიგმუნდის $L\ln L$ კლასები.

განსაზღვრება 5.2. ვიტყვით, რომ ზომადი f ფუნქცია ეკუთვნის $L\ln L$ კლასს, თუ სრულდება პირობა

$$\int_T|f(t)|\ln^{+}|f(t)|dt=\int_{[0,\infty)}\left|\{|f|>\lambda\}\right|\frac{d\left(\lambda\ln^{+}\lambda\right)}{d\lambda}<\infty,$$

სადაც

$$\ln^+ t = \begin{cases} \ln t, \ t \ge 1 \\ 0, \ t < 1 \end{cases}$$

ახლა ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ

თეორემა 5.3. ვთქვათ, T არის ნახევრადწრფივი ოპერატორი, რომელიც განსაზღვრულია $L + L^\infty$-ზე და ერთდროულად არის სუსტი $(1,1)$ და (∞,∞) ტიპის. მაშინ T ასახვს $L\ln L$-ს L-ში და

(5.2) $$\|Tf\|_1 \le c + c\int_T |f(t)| \ln^+ |f(t)| dt ,$$

სადაც c არის აბსოლუტური კონსტანტა, რომელიც არ არის დამოკიდებული f-ზე.

დამტკიცება. რადგან $\left|\{|Tf| \le 1\}\right| \le 2\pi$, ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ რაღაც c მუდმივისათვის

(5.3) $$I = \int_{\{|Tf|>1\}} |Tf(t)| dt \le c\int_T |f(t)| \ln^+ |f(t)| dt ,$$

მაგრამ ზემოთ აღნიშნული ტოლობა გამომდინარეობს (5.1)-დან და ტონელის თეორემიდან

$$I = \int_{[1,\infty)} \left|\{|Tf| > \lambda\}\right| d\lambda \le c \int_{[1,\infty)} \frac{1}{\lambda} \int_{[c\lambda,\infty]} \left|\{|f| > s\}\right| ds d\lambda =$$

$$= c_1 \int_{[c,\infty]} \left|\{|f| > s\}\right| \int_{[1,s/c]} \frac{d\lambda}{\lambda} ds =$$

$$= c_1 \int_{[c,\infty]} \left|\{|f| > s\}\right| \ln^+ \left(\frac{s}{c}\right) ds . \quad \blacksquare$$

თეორემა 5.3-ის სიზუსტე ადვილად მტკიცდება თუ შევნიშნავთ რომ ჰარდისა და ლიტვუდის მაქსიმალური ფუნქციისათვის სამართლიანია (5.2)-ს საპირისპირო უტოლობა, კერძოდ,

თეორემა 5.4 (სტეინი). ვთქვათ, $f \in L(T)$ ისეთია, რომ $Mf \in L(T)$. მაშინ $f \in L\ln L(T)$.

დამტკიცება. დასაწყისისთვის ვაჩვენოთ, რომ $\lambda > |f|_T$-თვის სამართლიანია

(5.4) $$\frac{1}{2\lambda} \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(t)| dt \le \left|\{Mf > \lambda\}\right| .$$

მართლაც, ვთქვათ $\{I_j\}$ არის λ დონის კალდერონისა და ზიგმუნდის დეკომპოზიცია; გავიხსენოთ, რომ, კერძოდ,

(5.5) $$\lambda < \frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f(t)| dt \le 2\lambda , \quad \text{ყოველი } j\text{-სათვის,}$$

და

(5.6) $$|f(t)| \le \lambda \quad \text{თ.ყ. } T \setminus \bigcup_j I_j\text{-ში.}$$

(5.5)-ში პირველი უტოლობადან გამომდინარეობს, რომ $\underset{j}{\cup} I_j \subseteq \{Mf > \lambda\}$, ხოლო მეორედან გვაქვს

(5.7) $$\int_{\cup I_j} |f(t)|dt \leq 2\lambda \left|\cup I_j\right| \leq 2\lambda \left|\{Mf > \lambda\}\right|.$$

ამის გარდა, ვინიდან (5.6)-დან $\{|f| > \lambda\} \subseteq \cup I_j$, ამიტომ (5.4) შეფასება გამომდინარეობს (5.7)-დან. ახლა (5.4)-ის ინტეგრებით ვიღებთ

$$\int_{[|f|_T,\infty)} \frac{1}{\lambda} \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(t)|dt d\lambda =$$

$$= \int_{[|f|>|f|_T)} |f(t)| \int_{\{|f|_T, |f(t)|\}} \frac{d\lambda}{\lambda} dt \leq$$

$$\leq 2 \int_{[0,\infty)} \left|\{Mf > \lambda\}\right| d\lambda .$$

აქედან მარტივად გამომდინარეობს სასურველი შედეგი. ■

§6 ბანახის უწყვეტობის პრინციპი და თ.ყ. კრებადობა

ქვემოთ B-თი აღვნიშნავთ ლებეგის $L^p(T)$, $1 \le p < \infty$, სივრცეს ან $C(T)$-ს. ჩვენ განვიხილავთ ოპერატორთა მიმდევრობას (ისევე როგორც ფურიეს კერძო ჯამებს), განსაზღვრული B-ზე და ზომით უწყვეტია. უფრო ზუსტად, მიმდევრობის ყოველი ოპერატორს აქვს შემდეგი თვისებები:

(6.1) $$\left|Tf(x)\right| < \infty \quad \text{თ.ყ., ყოველი } f \in B.$$

ამასთან, თუ f_n, $f \in B$ და $\|f_n - f\|_B \to 0$, მაშინ $Tf_n \to Tf$ ზომადი თ.ყ., ანუ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ -სათვის

(6.2) $$\left|\left\{\left|Tf_n - Tf\right| > \varepsilon\right\}\right| \to 0, \quad \text{როცა } n \to \infty.$$

ასეთი $\{T_n\}$ ოპერატორთა მიმდევრობებისათვის ჩვენ გვაქვს

(6.3) $$T_N^* f(x) = \max_{1 \le n \le N} \left|T_n f(x)\right|, \quad f \in B$$

და

(6.4) $$T^* f(x) = \sup_N T_N^* f(x), \quad f \in B.$$

იმ შემთხვევაში, თუ

(6.5) $T_n f(x)$ კრებადია, როცა $n \to \infty$, თ.ყ., ყოველი $f \in B$-თვის,

მაშინ ასევე

(6.6) $$T^* f(x) < \infty \quad \text{თ.ყ., ყოველი } f \in B.$$

ჩვენ გვინტერესებს ვაჩვენოთ, რომ (6.6) თვისთავად გვაძლევს ზომით უწყვეტობას $T^* f$ -სთვის და ეს ფაქტი თავის მხრივ შეიძლება გამოვიყენოთ (6.5) მისაღებად. ჩვენ დავიწყებთ უწყვეტობის შედეგების განხილვით.

თეორემა 6.1 (ბანახის პრინციპი). ვთქვათ $\{T_n\}$ არის წრფივი ასახვების მიმდევრობა B-ში, რომელიც აკმაყოფილებს (6.6) პირობას. მაშინ არსებობს დადებითი, არაზრდადი $C(\lambda)$, $\lambda > 0$ ფუნქცია, რომელიც მიისწრაფის 0-საკენ, როცა $\lambda \to \infty$ და ყოველი $f \in B$-სათვის

(6.7) $$\left|\left\{T^* f > \lambda \|f\|_B\right\}\right| \le C(\lambda), \quad \text{ყოველი } \lambda > 0\text{-თვის.}$$

დამტკიცება. საკმარისია განვიხილოთ მხოლოდ ის შემთხვევა, როცა $\| f\|_B = 1$. დავაფიქსიროთ $\varepsilon > 0$. მაშინ (6.6)-ის გამოყენებით ყოველ $f \in B$-ს ეთანადება მთელი რიცხვი $n = n(f)$ ისეთი, რომ $\left|\{T^* f > n\}\right| \le \varepsilon$. სხვა სიტყვებით, ჩვენ გვაქვს

(6.8) $$B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{ f : \left|\{T^* f > n\}\right| \le \varepsilon \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n .$$

ამრიგად, ყოველი B_n ჩაკეტილია B-ში. მართლაც, ვინაიდან

$$B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{ f : \left|\{T_N^* f > n\}\right| \le \varepsilon \right\}$$

და T_N^*, ოპერატორები აგრეთვე, არის ზომით უწყვეტი, ამიტომ ყოველი სიმრავლე ზემოთ განხილულ თანაკვეთაში არის ჩაკეტილი. მაშასადამე, ასეთი სიმრავლეები ჩაკეტილია B_n-ში. (6.8) გამოსახავს იმ ფაქტს, რომ B არის თვლადი გაერთიანება ჩაკეტილი სიმრავლეებისა. ამიტომ გაერთიანება და ბერის კატეგორიების შესახებ თეორემის ძალით რომელიღაც B_n შეიცავს ბირთვს. სხვა სიტყვებით, არსებობს მთელი n რიცხვი, $f_0 \in B$ და $\eta > 0$ ისეთი, რომ

(6.9) $$\left| f : \{T^* f > n\}\right| \le \varepsilon , \quad \text{როცა} \| f_0 - f\|_B \le \eta .$$

ამ ბირთვს გადავიტანთ რა კოორდინატთა სათავეში, (6.9) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგნაირად

(6.10) $$\left|\{T^*(f_0 + \eta f) > n\}\right| \le \varepsilon \quad \text{როცა } \| f\|_B \le \eta .$$

ამის გარდა, ვინაიდან T^* არის ნახევრად წრფივი, გვაქვს $T^* f(x) \le T^*(f_0 + \eta f)(x) / \eta + T^* f_0 (x) / \eta$. მაშასადამე, (6.10)-ის გამოყენებით

(6.11) $$\left|\{T^* f > 2n/\eta\}\right| \le \left|\{T^*(f_0 + \eta f) > n\}\right| + \left|\{T^* f_0 > n\}\right| \le 2\varepsilon , \quad \text{როცა } \| f\|_B \le 1 .$$

მაგრამ ზემოთ აღნიშნული ε-ის ნებისმიერების გამო, (6.11)-დან ვასკვნით, რომ თუ $C(\lambda) = \sup\limits_{\| f\|_B \le 1}\left|\{T^* f > \lambda\}\right|$, მაშინ $\lim\limits_{\lambda\to\infty} C(\lambda) = 0$. ეს თეორემის დამტკიცებას ნიშნავს. ∎

უმეტეს გამყენებებში $\{T_n f(x)\}$-ების თ.ყ. კრებადობა შეიძლება დადგინდეს ყოველი f-სათვის ყველგან მკვრივ სიმრავლეზე B ფუნქციათა კლასში. ამ შემთხვევაში ბანახის პრიციპი გვაძლევს შემდეგ დებულებას.

დებულება 6.2. ვთქვათ, $\{T_n\}$ არის ისეთ ოპერატორთა მიმდევრობა B-ში, რომლისთვისაც სრულდება (6.6), მაშინ სიმრაველე $B_0 = \{ f \in B : T_n f(x)\}$ ($T_n f(x)$ თ.ყ. კრებადია) არის ჩაკეტილი B-ში. კერძოდ, თუ B_0 მკვრივია, მაშინ ყოველი $f \in B$-სათვის $T_n f(x)$ თ.ყ. კრებადია.

დამტკიცება. ვთქვათ, f არის ჩაკეტილი ნორმით B_0-ში. ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ, რომ $f \in B_0$. ვთქვათ, $\tau f(x) = \limsup_{m,n\to\infty} |T_n f(x) - T_m f(x)|$. საკმარისია დავამტკიცოთ, რომ $\tau f(x) = 0$ თ.ყ. რადგან $\tau f(x) \le 2T^* f(x)$, ამიტომ (6.7) გვაძლევს

(6.12) $$\left|\left\{\tau f > \lambda \|f\|_B\right\}\right| \le C(\lambda/2).$$

ახლა, $f \in B$ და $g \in B_0$-სთვის, $\tau f(x) = \tau(f-g)(x)$ თ.ყ. x-სათვის. ამასთნ, (6.12) გამოყენებით $\left|\left\{\tau f > \lambda \|f-g\|_B\right\}\right| \le C(\lambda/2)$. ავარჩიოთ $\lambda = 1/\varepsilon$ და ვთქვათ g იყოს ისეთი, რომ $\|f-g\|_B \le \varepsilon^2$. მაშინ $\left|\left\{\tau f > \varepsilon\right\}\right| \le C(1/2\varepsilon)$. რადგან $C(1/2\varepsilon) \to 0$, როცა $\varepsilon \to 0$, ამიტომ $\tau f(x) = 0$ თ.ყ. ■

სანამ გამოვიყენებთ ბანახის პრინციპს ფურიეს $s_n(f,x)$ ჯამებზე, ჯერ უნდა „გავაკონტროლოთ" კერძო ჯამების ზრდის რიგი, როცა $f \in L^2$. ვიგულისხმოთ, რომ

(6.13) $$s_n(f,x) = 0(\lambda_n) \quad \text{თ.ყ., ყოველი } f \in L^2(T),$$

სადაც λ_n არის ფიქსირებული, არაზრდადი მიმდევრობა, რომელიც მიისწრაფის ∞-სკენ n-თან ერთად და ვაჩვენოთ, რომ ფუნქცია $f \sim \sum c_j e^{ijx}$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

(6.14) $$\sum |c_j|^2 \lambda_{|j|}^2 < \infty,$$

ფურიეს მწკრივი კრებადია f-საკენ თ.ყ. T-ზე. ცხადია, (6.14) უფრო ეფექტურია, როდესაც „ნელია" λ_n-ების ზრდა. საუკეთესო შედეგი, რომელსაც ჩვენ აქ მოვიყვანთ, არის კოლმოგოროვისა და სელვერსტოვის თეორემა; λ_n-ის რიგი არის $(\ln n)^{1/2}$, როცა $n \to \infty$.

დებულება 6.3. ვთქვათ (6.13) სრულდება, თუ $f \in L^2(T)$ და ამასთანავე სრულდება (6.14), მაშინ $\lim_{n\to\infty} s_n(f,x)$ არსებობს თ.ყ.

დამტკიცება. $h \in L^2(T)$-სათვის ავიღოთ $T_n h(x) = s_n(h,x)/\lambda_n$, $T^* h(x) = \sup_n |T_n h(x)|$. თეორემა 6.1. ძალით არსებობს ფუნქცია $C(\lambda) \to 0$, როცა $\lambda \to \infty$ ისეთი, რომ

(6.15) $$\left|\left\{T^* h > \lambda \|h\|_2\right\}\right| \le C(\lambda)$$

გადავიდეთ დებულების დამტკიცებაზე. ამისათვის შემოვიღოთ

(6.16) $$\tau h(x) = \limsup_{n\to\infty} |T_n h(x)|.$$

$\tau h(x) \le T^{*}h(x)$ უტოლობიდან, (6.15) სამართლიანია τ -თვის T^{*} ნაცვლად, ანუ ყოველი $h \in L^{2}(T)$ და $\lambda > 0$ სათვის, $\left|\left\{\tau h > \lambda\|h\|_{2}\right\}\right| \le C(\lambda)$. მაგრამ $\tau h(x)$ დიდად არ შეიცვლება, თუ h -ს ჩავანაცვლებთ $h - s_{n}(h)$ -ით. ასე, რომ გვაქვს $\left|\left\{\tau h > \lambda\|h - s_{n}(h)\|_{2}\right\}\right| \le C(\lambda)$. ამრიგად,

(6.17) $$\left|\{\tau h > \lambda\}\right| \le C\left(\lambda / \|h - s_{n}(h)\|_{2}\right).$$

და თუ გავითვალისწინებთ (1.6), III თავიადან [1], მაშინ (6.17)-ის მარჯვენა მხარე მიისწრაფის 0 -კენ, როცა $n \to \infty$ და, მაშასადამე, $\left|\{\tau h > \lambda\}\right| = 0$ ყოველი $\lambda > 0$ -თვის; ამრიგად,

(6.18) $$\lim_{n \to \infty}\left(s_{n}(h,x)/\lambda_{n}\right) = 0 \quad \text{თ.ყ. } T\text{-ზე, } h \in L^{2}(T).$$

ახლა მარტივია დამტკიცების დასრულება. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ რისისა და ფიშერის თეორემის გამოყენებით არსებობს ფუნქცია L^{2} -დან, რომ $g \sim \sum c_{j}\lambda_{|j|}e^{ijx}$.

ამის გარდა, მარტივი დასანახია, რომ

$$s_{n}(f,x) = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{j}} - \frac{1}{\lambda_{j+1}}\right)s_{j}(g,x) + \frac{s_{n}(g,x)}{\lambda_{n}} =$$

$$= I_{n} + J_{n}.$$

(6.18)-ის ძალით $J_{n} \to 0$, როცა $n \to \infty$ თ.ყ. T -ზე, და ვინაიდან $\left\|s_{j}(g)\right\|_{1} \le \left\|s_{j}(g)\right\|_{2} \le c\|g\|_{2}$, ამიტომ

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda_{j}} - \frac{1}{\lambda_{j+1}}\right)\left\|s_{j}(g)\right\|_{1} \le \frac{1}{\lambda_{0}}\|g\|_{2} < \infty,$$

და მწკრივი I_{n} კრებადია (აბსოლუტურად) თ.ყ. T -ში. ამრიგად, $s_{n}(f,x)$ კრებადია თ.ყ. ■

ლემა 6.4 (კალდერონი). ვთქვათ, $\{E_{k}\}$ არის T -ს ქვესიმრავლეების მიმდევრობა ისეთი, რომ $\sum|E_{k}| = \infty$, მაშინ არსებობს მიმდევრობა $\{x_{k}\} \subset T$ ისეთი, რომ თ.ყ. $x \in T$ არის უსასრულოდ ზევრი $(x_{k} + E_{k})$ სიმრავლის ელემენტი.

დამტკიცება. $|E_{k}|$-ებზე პირობები ექვივალენტურია ფაქტისა, რომ $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \left(|E_{k}|/2\pi\right)\right)$ განშლადია 0 -სკენ. T -ს იმ x -ების, ქვესიმრავლე რომლებიც ეკუთვნის უსასრულოდ ზევრ $(x_{k} + E_{k})$-ს, არის

(6.19) $$\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k \ge n}(x_{k} + E_{k})\right).$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ x_k -ების ნებისმიერად არჩევის შემთხვევაში აღნიშნული სიმრავლის (იხ. (6.19)) დამატება არის 0 ზომის. თუ შემოვიღებთ აღნიშნავს $F_k = T \setminus (x_k + E_k)$, მაშინ აღნიშნულის დამატება არის $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k\ge n} F_k\right)$. დასამტკიცებელს დავასაბუთებთ მას შემდეგ, რაც ვაჩვენებთ, რომ შეიძლება x_k -ები ავარჩიოთ ისე, რომ

(6.20)
$$\left|\bigcap_{k\ge n} F_k\right| = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$

მაშინ ჯერ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $n=1$ და ყურადღება მივაბრყოთ გამოსახულებას $F = \bigcap_{k=1}^{m} F_k$. ვთქვათ, χ_j, $1 \le j \le m$, არის F_j-ის მახასიათებელი ფუნქცია. მაშინ F -ის მახასითებელ ფუნქციას $\chi(t)$ ფუნქციისათვის

(6.21)
$$\chi(t) = \chi_1(t - x_1)\cdots\chi_m(t - x_m)\,,$$

ამასთან, $|F|$ ზომა იქნება

(6.22)
$$\int_T \chi(t)\,dt = \int_T \chi_1(t - x_1)\cdots\chi_m(t - x_m)\,dt\,.$$

თუ χ ფუნქციას წარმოვიდგენთ როგორც $m+1$ ცვლადის t, x_1, ..., x_m ფუნქციად, და $\left(1/(2\pi)^m\right)\chi(t)$ -ს ვაინტეგრებთ ყველა ცვლადის მიმართ, (რომელთაგან თითოეული იცვლება T -ზე), მაშინ მივიღებთ

(6.23)
$$\frac{1}{(2\pi)^m}\int \chi(t)\,dx_1\cdots dx_m dt =$$
$$= \int_T \left(\frac{1}{2\pi}\int_T \chi_1(t - x_1)\,dx_1\right)\cdots\left(\frac{1}{2\pi}\int_T \chi_m(t - x_m)\,dx_m\right)dt =$$
$$= 2\pi\sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{|E_k|}{2\pi}\right).$$

(6.23)-ის გამოსახულების მარჯვენა მხარე შეგვიძლია გავხადოთ რაგინდ მცირე, ვთქვათ $< \frac{1}{2}$, უკანასკნელი შესაძლებელია m -ს გაზდის ხარჯზე, რადგან ზემოდ ნახსენები ნამრავლი არის განშლადი. ვინაიდან m დაფიქსირებულია, ამიტომ შეგვიძლია ავარჩიოთ $x_1, \ldots, x_m$ ისე, რომ $|F| < \frac{1}{2}$. მართლაც, დავუშვათ, რომ ყოველი $x_1, \ldots, x_m$ -თვის (რომელთაგან თითოეული იცვლება T -ზე) ინტეგრალი (6.22) აღემატება $\frac{1}{2}$ -ს. თუ გამოსახულება (6.22)-ში გავყოფთ

$\left(2\pi\right)^m$-ზე ვაინტეგრებთ, მაშინ ადვილი მისახვედრია, რომ (6.23)-ში აღემატება $\frac{1}{2}$-ს. რაც შეუძლებელია. ამრიგად, არსებობს T-ში წერტილები $x_1^{(1)},\dots,x_{m_1}^{(1)}$ რომლებისთვისაც $\left|\bigcap_{k=1}^{m_1} T\setminus\left(x_k^{(1)}+E_k\right)\right|<\frac{1}{2}$. საზოგადოდ ნათელია, რომ ჩვენ შეგვიძლია ავარჩიოთ $x_1^{(1)},\dots,x_{m_i}^{(j)}$ წერტილები ისე, რომ

$$\left|\bigcap_{k=m_{(j-1)}+1}^{m_j}\left(T\setminus\left(x_k^{(j)}+E_k\right)\right)\right|<\frac{1}{2^j},$$

$j=1,2,\dots,$ $m_0=0$, m_j იზრდება ∞-სკენ. მაშასადამე, ყოველი n-სათვის როგორც კი $m_j>n$, გვაქვს

$$\left|\bigcap_k F_k\right|\le\left|\bigcap_{k=m_{j-1}+1}^{m_j}F_k\right|<\frac{1}{2^j},\quad \text{ყოველი საკმარისად დიდი } j\text{-სათვის.}$$

ამრიგად (6.20) სამართლიანია. ლემა დამტკიცებულია. ■

თეორემა 6.5. (კალდერონი) $f\in L^2\left(T\right)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თ.ყ. კრებადია T-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ასახვა $f\to s^*\left(f\right)=\sup_n\left|s_n\left(f\right)\right|$ არის სუსტი $\left(2,2\right)$ ტიპის.

დამტკიცება. საკმარისი პირობა გამომდინარეობს დებულება (6.2)-ში ჩატარებული მსჯელობის ანალოგიურად. პირიქით, თუ ყოველი $f\in L^2\left(T\right)$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თ.ყ. კრებადია T-ში, მაშინ $s^*\left(f,x\right)<\infty$ და ბანახის უწყვეტობის პრინციპის გამოყენებით, არსებობს ფუნქცია $C\left(\lambda\right)$ ისეთი, რომ $C\left(\lambda\right)\to 0$, როცა $\lambda\to\infty$ და $\left|\left\{s^*\left(f\right)>\lambda\|f\|_2\right\}\right|\le C\left(\lambda\right)$; საჩვენებელი დარჩა, რომ $C\left(\lambda\right)=O\left(\lambda^{-2}\right)$. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ანუ ყოველი $N\ge 0$ მთელი რიცხვისთვის არსებობს ფუნქცია $f_N\in L^2$ ნორმით $\|f_N\|_2=1$ და რიცხვი $\lambda_N>0$ ისეთი, რომ

(6.24) $$\left|E_N\right|=\left|\left\{s^*\left(f_N\right)>\lambda_N\right\}\right|\ge 2^N/\lambda_N^2$$

ტრიგონომეტრიული პოლინომების L^2-ში სიმკვრის გათვალსწინებით შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ f_N არის p_N პოლინომი ნორმით 1. შევნიშნოთ, აგრეთვე რომ რადგან (6.24)-დან ვიღებთ

(6.25) $$2^N/\lambda_N^2\le 2\pi,\quad \text{ყოველი } N\text{-სათვის,}$$

ამიტომ $\lambda_N \to \infty$, როცა N. λ_N-ის გამოყენებით ავაგოთ ახალი მიმდევრობა $\{\mu_j\}$ შემდეგნაირად: თუ $k_0 = 1$ და $N \geq 1$-სათვის, k_N-ით აღვნიშნოთ უმცირესი მთელი რიცხვი ისეთი, რომ

(6.26)
$$1 \leq 2^N \mathrm{k}_N / \lambda_N^2 \leq 2\pi,$$

და ვთქვათ,

(6.27)
$$\mu_j = \lambda_N \chi_{\left[\sum_{n=1}^{N} k_{n-1}, \sum_{n=1}^{N} k_n\right]}(j), \quad j, N > 1.$$

თუ დაწვრილებით ვიტყვით, μ-ების შეიცავს λ_N-ების ბლოკებს: პირველი k_1 ცალი წევრი λ_1-ის ტოლია, შემდეგი k_2 ცალი წევრი λ_2-ის ტოლია და ა.შ. შემოვიღოთ $\{v_j\}$. ამისათვის (6.27)-ში μ_j-ებში λ_N შეიცვალოთ 2^N-ით. (6.25) და (6.26)-ის გამოყენებით ადვილად შეიძლება შევამოწმოთ $\{\mu_j\}$ მიმდევრობის ორი თვისება:

(6.28)
$$\sum_j \frac{1}{\mu_j^2} = \sum_N \frac{k_N}{\lambda_N^2} \leq 2\pi \sum_N 2^{-N} < \infty$$

და

(6.29)
$$\sum_j \frac{v_j}{\mu_j^2} = \sum_N \frac{k_N 2^N}{\lambda_N^2} \geq \sum_N 1 = \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ (6.24) შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით

(6.30)
$$\left|E_j\right| = \left|\left\{s^*\left(p_j\right) > \mu_j\right\}\right| \geq v_j / \mu_j^2,$$

სადაც p_j არის პოლინომი ნორმით 1, რომელიც შეესაბამება μ_j-ს. გამოვიყენებთ რა (6.29), თვისებას $\left|E_j\right| = \infty$ და (6.4) ლემას, არსებობს წერტილები $\{x_1, \ldots, x_j, \ldots\} \in T$ ისეთი, რომ თ.ყ. $x \in T$ მიეკუთვნება უსასრულო ბევრ სიმრავლეს $\left(x_j + E_j\right)$. ახლა ავარჩიოთ ∞-კენ იმდენად სწრაფად ზრდადი ისეთი m_j მიმდევრობა რომ პოლინომებს $e^{im_j x} p_j(x)$ არ ჰქონდეს საერთო წევრი. ბოლოს განვიხილოთ

(6.31)
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{im_j x} p_j\left(x - x_j\right)}{\mu_j}.$$

შემდეგ ვაჩვენოთ, რომ ტრიგონომეტრიული (6.31) მწკრივი კრებადია f-საკენ L^2-ში, რაც ნიშნავს, რომ ეს მწკრივი წარმოადგენს ფურიეს მწკრივს და $s_n(f, x)$ არ არის თ.ყ. კრებადი $x \in T$-ზე, ცხადია ეს წინააღმდეგობაა, ჯერ ერთი

$$\left\|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{im_j x} p_j\left(x - x_j\right)}{\mu_j}\right\|_2^2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=N}^{M} \frac{\left\|p_j\right\|_2^2}{\mu_j^2} = \sum_{j=N}^{M} \frac{1}{\mu_j^2} \to 0,$$

როცა $N, M \to \infty$, და (6.31) არის $f \in L^2$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივი. ამის გარდა E_j-ის განსაზღვრების ძალით, $s^*\left(p_j, x - x_j\right) > \mu_j$ ყოველთვის, როცა $x \in \left(x_j + E_j\right)$; ეს კერძოდ ნიშნავს, რომ ზოგიერთ სრული ბლოკი, რომელიც ჩნდება „მწკრივის კუდში“ მოდულით აღემატება 1-ს. რადგან T-ს თითქმის ყველა x, ეკუთვნის უსასრულოდ ბევრ $\left(x_j + E_j\right)$-ებს. ამრიგად f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი განშლადია სრული ზომის სიმრავლეზე.

ლიტერატურა

[1] A. Torchinsky, Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. ACADEMIC PRESS, INC. (1986).
[2] 3. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа. Издательство “Наука “ Главная Редакция Физико-математической Литературы, Москва (1976).