# ჯგუფთა მრავალსახეობების შესახებ

მომხსენებელი**: თეონა ნადირაძე**

ელ-ფოსტა: teonanadiradze1997@gmail.com

უნივერსიტეტი: **ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი**

ფაკულტეტი: **ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა (მათემატიკა)**

დეპარტამენტი: **ალგებრა-გეომეტრია**

**ანოტაცია**

მოხსენებაში შემოვიტანთ ჯგუფთა მრავალსახეობების თეორიის საწყის ცნებებს და დავადგენთ, რომ მრავალსახეობები ემთხვევა იმ ჯგუფთა კლასებს, რომლებიც ჩაკეტილია ქვეჯგუფთა, ჰომომორფიზმთა (ფაქტორ-ჯგუფთა) და დეკარტულ ნამრავლთა მიმართ.

## 1. ძირითადი ცნებები და მაგალითები

ჯგუფის ცნება ერთ-ერთი ძირითადი ზოგადმათემატიკური ცნებაა.

**განსაზღვრება 1.** არაცარიელ G სიმრავლეს ბინარული ოპერაციით $*$: G×G→ G, $(a, b) \to a * b \epsilon$G, როცა $a, b \epsilon$G, ეწოდება ჯგუფი, თუ

1) ოპერაცია ასოციაციურია (ე.ი. $(a * b) * c$=$a * (b * c)$, ყველა $a, b, c\epsilon$G;
2) არსებობს ნეიტრალური ელემენტი $e\epsilon$G (ე.ი.$a * e = e * a$= $a$, ყველა $a\epsilon$G);
3) ყოველი $a\epsilon$G ელემენტისთვის არსებობს შებრუნებული ელემენტი $a^{-1}\epsilon$G ( ე.ი $a * a^{-1}$=$a^{-1} * a$= $e$).

**შენიშვნა.** ნეიტრალური ელემენტი ( ადიციური ,,+" ჩაწერის დროს, მას ეწოდება ნულოვანი ელემენტი n= $e$=0, ხოლო მულტიპლიკაციური ,,·" ჩანაწერისთვის, მას ეწოდება ერთეულოვანი ელემენტი n= $e$=1) ერთადერთია. შებრუნებული $a^{-1}$ ელემენტი $a\epsilon$G ელემენტისთვის აგრეთვე განსაზღვრულია ცალსახად. კომუტაციურ ჯგუფს (ე.ი.$a * b = b * a$, ყველა $a, b\epsilon$G) ხშირად ეწოდება ***აბელური ჯგუფი.***

ვთქვათ, X ნებისმიერი ქვეისმრავლეა G-ში. ყველა იმ H≤G ქვეჯგუფის თანაკვეთა, რომელიც X-ს შეიცავს, X-ის შემცველი უმცირესი ქვეჯგუფია. ის ⟨X⟩-ით (გამოიყენება აგრეთვე აღნიშვნები $gr$(X), $gr(x|x\epsilon$X), (X)) აღინიშნება და ეწოდება X ***სიმრავლით წარმოქმნილი ქვეჯგუფი*** G-ში. თუ G=⟨X⟩, მაშინ ამბობენ, რომ G ჯგუფის ***წარმომქმნელთა ელემენტების სიმრავლეა*** X. G ჯგუფს ეწოდება ***სასრულად წარმოქმნილი,*** თუ არსებობს მისი წარმომქმნელი სასრული X სიმრავლე.

ცხადი ჩანაწერით, ⟨X⟩≤G ქვეჯგუფის ელემენტები შემდეგნაირად გამოისახება. ***ჯგუფური სიტყვა*** X ალფავიტში( X={$x_1, x_2$,..., $x_n$,…} ცვლადთა თვლადი სიმრავლეა) ვუწოდოთ ფორმალურ გამოსახულებას $v$= $v(\bar{x})$= ${x_1}^{\varepsilon_1}{x_2}^{\varepsilon_2}$... ${x_n}^{\varepsilon_n}$, $x_i\epsilon$X, $\varepsilon_i$=±1. ყოველი ასეთი სიტყვა ჩაწერს G ჯგუფის გარკვეულ $v$ ელემენტს. სამართლიანია შებრუნებულიც, ნებისმიერ ელემენტს ⟨X⟩ ქვეჯგუფიდან გააჩნია მითითებული სახის ჩანაწერი. შევნიშნოთ, რომ სხვადასხვა სიტყვებს შეუძლია ჩაწეროს ერთი და იგივე ელემენტი.

ვთქვათ, $v(\bar{x})$= $v(x_1, x_2$,..., $x_n)$ ჯგუფური სიტყვაა. მისი ***მნიშვნელობა*** ნებისმიერ G ჯგუფში ეწოდება $v(\bar{g})$= $v$ ($g_1, g_2$,..., $g_n$)$\epsilon$G ელემენტს, რომელიც $x_1, x_2$,..., $x_n$ ცვლადების $g_1, g_2$,..., $g_n$ ელემენტებით შეცვლით მიიღება.

**განსაზღვრება 2.** ამბობენ, რომ G ჯგუფზე სრულდება $v(\bar{x})$=1 იგივეობა, თუ $v(\bar{x})$ სიტყვის ყველა მნიშვნელობა G-ში ერთეულის ტოლია.

სხვანაირად, თუ შემოვიტანთ აღნიშვნას $v$(G)={ $v(\bar{g})$| $\bar{g}$ $\epsilon G^{n}$}.

$v(\bar{x})$ სიტყვა იგივეობაა G-ზე, თუ $v$(G)=1

ყველა შესაძლო იგივეობის საცავია თვლადი რანგის თავისუფალი F ჯგუფი X=$\{x_1, x_2,..., x_n,…\}$ ალფავიტით.

**<u>განსაზღვრება 3.</u>** ვთქვათ, $\mathfrak{L}$ ჯგუფთა კლასია. ამბობენ, რომ $\mathfrak{L}$-დან F=$\langle x_i|i\epsilon I\rangle$ ჯგუფი $\mathfrak{L}$ კლასის ***თავისუფალი ჯგუფია*** $\langle x_i|i\epsilon I\rangle$ ***თავისუფალი წარმომქმნელი სიმრავლით,*** თუ ნებისმიერი G $\epsilon\mathfrak{L}$ ჯგუფისათვის წარმომქმნელთა $\langle g_i|i\epsilon I\rangle$ სიმრავლით ასახვა $x_i \mapsto g_i$ გრძელდება F→ G ჰომომორფიზმამდე.

შეიძლება იმის ჩვენება, რომ არა ყველა ჯგუფთა კლასს გააჩნია თავისუფალი ჯგუფები. მაგალითად, აბელურ ჯგუფთა კლასში თავისუფალი ჯგუფები არსებობენ და აქვთ ძალიან კარგი აღწერა.

**<u>თეორემა.</u>** უსასრულო ციკლურ ჯგუფთა პირდაპირი ჯამები და მხოლოდ ისინი არიან თავისუფალი ჯგუფები აბელურ ჯგუფთა კლასში.

**<u>განსაზღვრება 4</u>.** ვთქვათ, V⊆F რაღაც სიტყვების სიმრავლეა. ყველა იმ ჯგუფთა

$\mathfrak{N}$(V) კლასი, რომელთათვისაც ნებისმიერი $v\epsilon$V სიტყვა იგივეობაა, ეწოდება V იგივეობათა სიმრავლით განსაზღვრული ***მრავალსახეობა***.

**მაგალითები:**

1) O- ყველა ჯგუფთა კლასი მოიცემა იგივეობათა ცარიელი სიმრავლით;
2) 1- ერთეულოვანი მრავალსახეობა, რომელიც შედგება ერთეულოვანი {1} ჯგუფისგან, მოიცემა $x$=1 იგივეობით;
3) $\boldsymbol{\mathcal{B}_n}$, n$\epsilon\mathbb{N}$, ყველა n პერიოდის მქონე ჯგუფის მრავალსახეობა მოიცემა $x^n$=1 იგივეობით;
4) $\boldsymbol{\mathcal{A}}$- ყველა აბელურ ჯგუფთა მრავალსახეობა მოიცემა იგივეობით $[x_1, x_2]= {x_1}^{-1}\, {x_2}^{-1} x_1\, x_2$=1;
5) $\mathfrak{N}_c$ -ყველა c საფეხურიან ნილპოტენტურ ჯგუფთა მრავალსახეობა მოიცემა $[x_1, \dots, x_{c+1}]$= 1 იგივეობით.

## 2. <u>მრავალსახეობები, როგორც ჯგუფთა ჩაკეტილი კლასები.</u>

თუ $\mathfrak{L}$ ჯგუფთა კლასია, მაშინ $\mathcal{S}\mathfrak{L}$, $\mathcal{Q}\mathfrak{L}, \mathcal{C}\mathfrak{L}$ აღვნიშნოთ შესაბამისად ამ კლასის ჩაკეტვა ქვეჯგუფების, ჰომომორფული ანასახებისა და დეკარტული ნამრავლების მიმართ. თუ $\mathfrak{L}$ მრავალსახეობაა, მაშინ, ცხადია, რომ $\mathcal{S}\mathfrak{L}$=$\mathfrak{L}$, $\mathcal{Q}\mathfrak{L}$=$\mathfrak{L}$, $\mathcal{C}\mathfrak{L}$=$\mathfrak{L}$.
სამართლიანია შებრუნებული კლასიკური თეორემა.

**თეორემა(ბირკგოფი)**. ვთქვათ, $\mathfrak{L}$ ჯგუფთა კლასია. თუ $\mathcal{S}\mathfrak{L}$=$\mathfrak{L}$, $\mathcal{Q}\mathfrak{L}$=$\mathfrak{L}$, $\mathcal{C}\mathfrak{L}$=$\mathfrak{L}$, მაშინ $\mathfrak{L}$ მრავალსახეობაა.

**<u>ამოცანა.</u>** მივუთითოთ ჯგუფთა $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ კლასები პირობებით:

1) $\mathcal{S}\mathfrak{L}\neq\mathfrak{L}$, $\mathcal{Q}\mathfrak{L}$=$\mathfrak{L}$, $\mathcal{C}\mathfrak{L}$=$\mathfrak{L}$.

$\mathfrak{L}$ – სრულ ჯგუფთა კლასი.

**<u>განსაზღვრება.</u>** G ჯგუფს ეწოდება ***სრული*** ან ***გაყოფადი***, თუ ყოველი მთელი $n>0$ რიცხვისათვის და ნებისმიერი $g\epsilon G$ ელემენტისათვის $nx=g$ განტოლებას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი (მულტიპლიკაციური ჩანაწერისათვის $x^n=g$ განტოლებას აქვს ერთი მაინც ამონახსნი).

რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ ჯგუფი სრულია. მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ ქვეჯგუფი არასრულია.

მაშასადამე, $\mathcal{S}\mathfrak{L}\neq\mathfrak{L}$, ხოლო $\mathcal{Q}\mathfrak{L}=\mathfrak{L}$, $\mathcal{C}\mathfrak{L}=\mathfrak{L}$.

2) $\mathfrak{M}$- გრეხვის გარეშე ჯგუფთა კლასი, ე.ი. ყოველ არაერთეულოვან ელემენტს გააჩნია უსასრულო რიგი, მაშინ $\mathcal{S}\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$, $\mathcal{C}\mathfrak{M}=\mathfrak{M}$, $\mathcal{Q}\mathfrak{M}\neq\mathfrak{M}$ თუ ავიღებთ $\mathbb{Z}$-ს, მას გრეხვა არ გააჩნია, მაგრამ $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -ს აქვს გრეხვა.

3) $\mathfrak{N}$- სასრულ ჯგუფთა კლასი, მაშინ $\mathcal{S}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$, ე.ი. სასრული ჯგუფის ნებისმიერი ქვეჯგუფი სასრულია.

სასრული ჯგუფის ნებისმიერი ფაქტორ-ჯგუფი სასრულია, ე.ი. $\mathcal{Q}\mathfrak{N}=\mathfrak{N}$

სასრულ ჯგუფთა დეკარტული ნამრავლი უსასრულოა, ე.ი. $\mathcal{C}\mathfrak{N}\neq\mathfrak{N}$.

მრავალსახეობათა თეორიაში მტკიცდება, რომ მრავალსახეობებს ყოველთვის გააჩნია თავისუფალი ჯგუფები.

ადვილი დასანახია, რომ $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ჯგუფთა კლასებს არ გააჩნია თავისუფალი ჯგუფები.

## გამოყენებული ლიტერატურა


1. Каргаполов М. И. , Мерзляков Ю.И.
   Основы теории групп. и-е изд. М. Наука. 1996

2. Нейман. Многообразия групп. ,,Мир'', 1969.