

**ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი**

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი



წრფივი ადვექციის განტოლების

ამონსნა ICON მოდელში

სამეცნიერო-კვლევითი პროექტი

თამარ ჯანელიძე

ხელმძღვანელები: რამაზ ბოჭორიშვილი

ჰენდრიკ ელბერნი

თბილისი

2020

აბსტრაქტი

ოთხ განზომილებიანი ვარიაციული მონაცემთა ასიმილაცია წარმოადგენს მოწინავე და თანამედროვე მეთოდს ატმოსფერული სისტემის ანალიზისთვის. ამ მიდგომაში რიცხვითი მეთოდების თვალსაზრისით გამოწვევას წარმოადგენს შეუღლებული მოდელის შემუშავება და შემდეგ მისი გამოყენება ასიმილაციის პროცესში. ატმოსფეროში, სითხის დინამიკაში სხვადასხვა ტრასერის გადატანისას მნიშვნელოვან როლს ასრულებს ადვექციის სქემების სიზუსტე. მაღალი რიგის სქემების გამოყენება კიდევ უფრო მნიშვნელოვანია დროით-სივრცით ვარიაციულ მონაცემთა ასიმილაციაში შეუღლებული მოდელის კომპონენტით. ნაშრომში წარმოდგენილია შეუღლებული მოდელის აგების ორი განსხვავებული მეთოდი გერმანული ამინდის სამსახურის ICON მოდელში წრფივი ადვექციის განტოლების ამოსახსნელად გამოყენებული რიცხვითი მეთოდისთვის. მეთოდები შედარებულია სხვადასხვა ადვექციის ტესტურ ამოცანებზე და მონაცემთა ასიმილაციის ექსპერიმენტების ფარგლებში.

Abstract

Among the most advanced and sophisticated methods for state analysis of an atmospheric system, is 4-dimensional variational data assimilation method (4D-var). The numerically challenging task of this approach is the development and application of the adjoint model components. For tracer transport in fluid dynamics accuracy of numerical advection scheme is vital. It is even more important for applications in space-time variational data assimilation with adjoint model version. In the given work two different developing adjoint solver for the linear advection equation in the German Weather Service's ICON model. Both methods are compared against each other on different advection test problems and data assimilation experiments.

სარჩევი

1 შესავალი	10
2 ICON მოდელი	13
3 ჰორიზონტალური ადვექცია	16
3.1 მიმართულებების მიხედვით გახლეჩვა	17
3.2 მიურას სქემა	18
4 ადვექციის განტოლება სფეროზე	20
4.1 ჰორიზონტალური ადვექციის სქემის ძირითადი ალგორითმი	21
5 ვარიაციული მონაცემთა ასიმილაცია	24
5.1 ფუნქციონალი	24
5.2 დისკრეტული ფუნქციონალი, გრადიენტი და ფუნქციონალის პრეკონდიცია .	28
5.3 4-განზომილებიანი ვარიაციული მონაცემთა ასიმილაცია ადვექციის განტო- ლებისთვის	30
5.4 ჰორიზონტალური ადვექციის სქემის სტანდარტული შეუღლებული სქემა . .	31
5.5 ჰორიზონტალური ადვექციის სქემის ხელოვნური წყაროს წევრით შეუღლე- ბული სქემა	35
5.6 შეუღლებული სქემის თვისებები	36
6 წრფივი ადვექციის ექსპერიმენტები	40
6.1 წრფივი ადვექციის ტესტური ამოცანები	41
6.2 რიცხვითი შედეგები	42
6.2.1 წრფივი ადვექციის ცხრილები	45
6.2.2 წრფივი ადვექციის გრაფიკები	47
7 მონაცემთა ასიმილაციის ექსპერიმენტები	47
7.1 მონაცემთა ასიმილაციის ტესტური ამოცანა	47
7.2 იტერაციული პროცესის კრებადობა	51
7.3 დაკვირვების წერტილების ზეგავლენა მინიმიზაციის პროცესზე	53
7.3.1 ბადის გახშირების ზეგავლენა მინიმიზაციაზე	55
7.4 წონებით მალიპულირება	55
8 დანართი	58

8.1 რიცხვითი შედეგები: წრფივი ადვექციის ცხრილები	58
8.2 რიცხვითი შედეგები: წრფივი ადვექციის ტესტის გრაფიკები	60
8.3 რიცხვითი შედეგები: ასიმულაციის ექსპერიმენტების ცხრილები	75
8.4 რიცხვითი შედეგები: ასიმულაციის ექსპერიმენტების გრაფიკები	77

ლიტერატურა

81

სურათები

1	გლობალური ბადე გახშირებული რეგიონალური ბადით ((1)).	16
2	(a) ექვსკუთხა სათვლელი უჯრა, $P'_i P'_{i+1}$ წიბოში გამავალი ნაკადის მიახლოებითი მნიშვნელობა არის $P'_i P'_{i+1} P''_i P''_{i+1}$ პარალელოგრამში არსებული ნაკადის რაოდენობა, C_i არის მასის ცენტრი. (b) ცდომილების ნორმების წერტილების რაოდენობაზე დამოკიდებულება. წყარო: (2)	19
3	ICON FFSL და შესაბამისი შეუღლებული სქემის შაბლონი. სამკუთხედები მხოლოდ უწყვეტი ხაზებით არის ICON FFSL სქემის შაბლონი, ხოლო წყვეტილ-ხაზებიანი სამკუთხედებთან ერთად არის შეუღლებული სქემის შაბლონი. . .	35
4	მყარი სხეულის როტაცია a) კოსინუსის ზარი, სტანდარტული შეუღლებული b) კოსინუსის ზარი, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3),(4) c) გაჭრილი ცილინდრი, სტანდარტული შეუღლებული d) გაჭრილი ცილინდრი , წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4).	47
5	დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} = 0$: a) კოსინუსის ზარები, სტანდარტული შეუღლებული, b) კოსინუსის ზარები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) c) გაჭრილი ცილინდრი, სტანდარტული შეუღლებული, d) გაჭრილი ცილინდრი, წყაროს წევრით შეუღლებული (3), (4).	48
6	დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$ a) კოსინუსის ზარები, სტანდარტული შეუღლებული, b) კოსინუსის ზარები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) c) გაჭრილი ცილინდრი, სტანდარტული შეუღლებული, b) გაჭრილი ცილინდრი, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4).	48
7	a)-b) - მოძრავი ვორტექსები, c)-d) - solid body როტაციის სიჩქარის ვექტორები, მოძრავი vortex საწყისი მონაცემი, გრაფიკის ხედვის კუთხე ($90^\circ, 0^\circ$), $t = T/2$: a) სტანდარტული შეუღლებული, b) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5) c) სტანდარტული შეუღლებული d) წყაროს წევრით შეუღლებული (3), (4).	49
8	მყარი სხეულის როტაცია, კოსინუსის ზარი: a) ზუსტი ამონახსნი b) ICON-FFSL, ლიმიტერი (3), (5) c) სტანდარტული შეუღლებული d) შეუღლებული ხელოვნური წყაროს წევრის დამატებით, ლიმიტერი (3), (5)	60

- 16 დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$, კოსინუსის ზარები: a) ზუსტი ამონახსნი b) სტანდარტული შეუღლებული, c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (5) 68
- 17 დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$, კოსინუსის ზარები, a)-d) - წირის გასწვრივ ზუსტი vs სტანდარტული შეუღლებული vs წყაროს წევრით შეუღლებული: a) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (4) b) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (5) c) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (4) d) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (5) 69
- 18 დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$, გაჭრილი ცილინდრები: a) ზუსტი ამონახსნი b) სტანდარტული შეუღლებული, c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (5) 70
- 19 დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$, გაჭრილი ცილინდრები, a)-d) - წირის გასწვრივ ზუსტი vs სტანდარტული შეუღლებული vs წყაროს წევრით შეუღლებული : a) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (4) b) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (5) c) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (4) d) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (5) 71
- 20 მოძრავი ვორტექსი: a) ზუსტი ამონახსნი, b) სტანდარტული შეუღლებული, c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (5) 72
- 21 მოძრავი ვორტექსი, a)-d) - უძრავი ბადე $(\lambda, \theta) \in [-\pi; \pi] \times [-\pi/2; \pi/2]$, გრაფიკის ხედვის კუთხე $(90^\circ, 0^\circ)$: a) ზუსტი ამონახსნი b) სტანდარტული შეუღლებული c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (5) 73
- 22 მყარი სხეულის როტაციის სინქარის ვექტორი, მოძრავი ვორტექსის საწყისი მონაცემი, a)-d) - გრაფიკის ხედვის კუთხე $(90^\circ, 0^\circ)$, $t = T/2$: a) ICON FFSL, ლიმიტერთ (3), (4) b) სტანდარტული შეუღლებული c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერთ (3), (5) 74
- 23 იტერაციების რაოდენობის ზეგავლენა, დეფორმაციული ნაკადი კონუსის ზარებისთვის, R2B4 ბადე, 5120 დაკვირვების წერტილი, იტერაციების რაოდენობა აბსცისათა დერძზე, ორდინატაზე ფუნქციონალის მნიშვნელობა a) 1-10 იტერაცია b) 11-20 იტერაცია c) 295-300 იტერაცია 77

- 24 იტერაციების რაოდენობის ზეგავლენა მინიმიზაციაზე, მოძრავი ვორტექსი, *R2B4* ბადე, 5120 დაკვირვების წერტილი, იტერაციების რაოდენობა აბსცისათა ღერძზე, ორდინატაზე ფუნქციონალის მნიშვნელობა a) 1-10 იტერაცია b) 11-20 იტერაცია c) 295-300 იტერაცია d) ფუნქციონალის მხოლოდ ბექგრაუნდ ნაწილი, 295-300 იტერაცია e) ფუნქციონალის მხოლოდ დაკვირვების ნაწილი, 295-300 იტერაცია 78
- 25 დაკვირვებების რაოდენობის ზეგავლენა მინიმიზაციაზე, *R2B4* ბადე, დაკვირვების წერტილების რაოდენობა აბსცისატა ღერძზე, ფუნქციონალის მნიშვნელობა ორდინატაზე a) მოძრავი ვორტექსი b) დეფორმაციული ნაკადი, კოსინუსის ზარები c) დეფორმაციული ნაკადი, ჩაჭრილი ცილინდრი 79
- 26 ბექგრაუნდისა და დაკვირვების ნაწილებზე მოდებული წონების ზეგავლენა მინიმიზაციაზე, *R2B4* ბადე, 5120 დაკვირვების წერტილი, ფუნქციონალი ბექგრაუნდისა და დაკვირვების ნაწილებზე სხვადასხვა წონების მოდებისას აბსცისათა ღერძზე, ფუნქციონალის მნიშვნელობა ორდინატაზე a) მოძრავი ვორტექსი b) დეფორმაციული ნაკადი, კოსინუსის ზარები c) დეფორმაციული ნაკადი, ჩაჭრილი ცილინდრი 80

ცხრილები

1	სიჩქარის ვექტორები	41
2	საწყისი მონაცემები	42
3	მყარი სხეულის როტაცია: საწყისი სიჩქარის ვექტორი 1, კოსინუსის ზარი: საწყისი მონაცემი 1, ბადე R2B04, $T = 1036800$ []	45
4	დეფორმაციული ნაკადი: არადივერგენტული საწყისი სიჩქარის ვექტორი 2, გაჭრილი ცილინდრი: საწყისი მონაცემი 5, ბადე R2B04, $T = 1036800$ []	45
5	მოძრავი ვორტექსები: საწყისი სიჩქარის ვექტორი 4, ვორტექსი: საწყისი მონაცემი 3, ბადე R2B04, $T = 1036800$ []	46
6	მყარი სხეულის როტაცია: საწყისი სიჩქარის ვექტორი 1, ჩაჭრილი ცილინდრი: საწყისი მონაცემი 2, ბადე R2B04, $T = 1036800$ []	58
7	დეფორმაციული ნაკადი: საწყისი არადივერგენტული სიჩქარის ვექტორი 2, კოსინუსის ზარები: საწყისი მონაცემი 4, ბადე R2B04, $T = 1036800$ []	58
8	დეფორმაციული ნაკადი: საწყისი დივერგენტული სიჩქარის ვექტორი 3, კოსინუსის ზარები: საწყისი მონაცემი 4, ბადე R2B04, $T = 1036800$ []	58
9	დეფორმაციული ნაკადი: საწყისი დივერგენტული სიჩქარის ვექტორი 3, ჩაჭრილი ცილინდრი: საწყისი მონაცემი 5, ბადე R2B04, $T = 1036800$ []	59
10	ცდომილება საწყის მონაცემში ასიმულაციამდე და შემდეგ. ფუნქციონალი $J = J_o$, R2B04 ბადე, 5120 დაკვირვების წერტილი, 50 იტერაცია	75
11	ბადის გახშირების ზეგავლენა ფუნქციონალზე, 20480 დაკვირვების წერტილი, 50 იტერაცია	76

1 შესავალი

ატმოსფეროს და ამინდის რიცხვითი მოდელირება მნიშვნელოვან როლს თამაშობს კლიმატის შემსწავლელ მეცნიერებებში. ასევე ქიმიური ტრანსპორტის მოდელები ფართოდ გამოიყენება ჰაერის დაბინძურების შესწავლისას. ატმოსფეროში მიმდინარე პროცესების მოდელირება ხდება კერძო-წარმოებული დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით და ამ განტოლებების ამოსახსნელად გამოიყენება სხვადასხვა რიცხვითი მეთოდები. შესაბამისად, რიცხვითი მეთოდების სიზუსტე მნიშვნელოვან ზეგავლენას ახდენს პროგნოზის სიზუსტეზე. ასევე მნიშვნელოვანია მოდელებში ატმოსფერულ სისტემაზე სხვადასხვა ტიპის დაკვირვებით მიღებული ინფორმაციის გამოყენება კიდევ უფრო აკურატული პროგნოზის გასაკეთებლად.

4-განზომილებიანი ვარიაციული მონაცემთა ასიმილაცია წარმოადგენს მოწინავე და თანამედროვე მეთოდს დროსა და სივრცეში არსებული დაკვირვებით მიღებული ინფორმაციის მოდელში ეფექტურად გამოსაყენებლად და მოდელის შედეგის გასაუმჯობესებლად. მეთოდის მიზანს წარმოადგენს დაკვირვებით მიღებული ინფორმაციის გამოყენებით, რიცხვით მოდელში შემავალი საწყისი ინფორმაციის გაუმჯობესება, რაც თავისთავად დადებითად აისახება მოდელის საბოლოო შედეგზე. მიზნის მისაღწევად ამოიხსნება მინიმიზაციის პრობლემა, სადაც ფუნქციონალი აღწერს შეუსაბამობას დაკვირვების ინფორმაციასა და მოდელის მიერ გამოთვლილ პროგნოზს შორის. მინიმიზაციის შედეგად მიიღება დაკვირვების ინფორმაციით გაუმჯობესებული საწყისი შემავალი მონაცემი მოდელისთვის.

ქიმიური ტრანსპორტის მოდელის ერთერთ მთავარ კომპონენტი, როგორც 4D ვარიაციული მონაცემთა ასიმილაციის ნაწილი, არის ადვექციის ალგორითმი. შესაბამისად, მონაცემთა ასიმილაციაში რიცხვითი მეთოდების მხრივ სირთულეს წარმოადგენს გამოყენებული ადვექციის შესაბამისი შეუღლებული კომპონენტის აგება. შეუღლებული მოდელი გამოიყენება ფუნ-

ქციონალის მინიმიზაციის იტერაციულ მეთოდებში საჭირო ფუნქციონალის გრადიენტის გამოსათვლელად. (6) ნაშრომში შესწავლილია ადვექციის განტოლების ამოსახსნელი წრფივი და არა-წრფივი ადვექციის სქემების გავლენა 4-განზომილებიან ვარიაციულ მონაცემთა ასიმილაციაზე. შედეგებმა აჩვენა, რომ ზუსტად ერთნაირი სკალარული ადვექციის ალგორითმი პირდაპირი და შეუღლებული მოდელებისთვის იძლევა მინიმიზაციის ამოცანის ოპტიმალურ ამონახსნს. (7) ნაშრომში მოცემულია, რომ წრფივი ადვექციის განტოლების შემთვევაში მინიმიზაციის შედეგი დამოკიდებულია შეუღლებული მოდელის ასაგებად გამოყენებულ ალგორითმზე, განსაკუთრებით არაწრფივი ადვექციის სქემების შემთვევაში. არსებობს სხვადასხვა გზები შეუღლებული მეთოდის ასაგებად, მაგალითად, (8) (9), მოცემულია შეუღლებული განტოლების გამოყვანის მეთოდი, ხოლო (10) მოცემულია რიცხვითი სქემის შესაბამისი შეუღლებული რიცხვითი სქემის აგების მეთოდი.

მოცემულ ნაშრომში განხილულია გერმანული ამინდის სამსახურის და მაქს-პლანკის მეტეოროლოგიური ინსტიტუტის ICON მოდელის ტრანსპორტის კომონენტი და წრფივი ადვექციის განტოლებისთვის გამოყენებული რიცხვითი სქემა. ICON მოდელი ოპერაციულად გამოიყენება გერმანული ამინდის სამსახურში და იყენებს სხვადასხვა რიგის რიცხვით სქემებს განტოლების ამოსახსნელად. ნაშრომში წარმოდგენილია ორი სხვადასხვა მეთოდი ჰორიზონტალური ადვექციის მეთოდისთვის შეუღლებული სქემის ასაგებად. ერთი მეთოდი არის სტანდარტული მეთოდი, რიცხვითი სქემიდან შესაბამისი შეუღლებული სქემის აგება. ხოლო მეორე მეთოდი შემუშავებული იქნა ნაშრომზე მუშაობის პერიოდში და ხელოვნური წყაროს წევრის დამატებით აიგება შეუღლებული რიცხვითი სქემა. ახალი მეთოდით შეუღლებული სქემის აგებას აქვს ის უპირატესობები, რომ იძლევა შეუღლებული მოდელის უფრო სწრაფად აგების საშუალებას, მეთოდი შესაბა-

მისი კოდის აგება არის უფრო მარტივი, რადგან შესაძლებელია უკვე არსებული პირდაპირი მოდელის შესაბამისი პროგრამული კოდის გამოყენება, მხოლოდ მცირედი მოდიფიკაციებია საჭირო. ამასთან წარმოადგენს ეფექტურ გადაწყვეტას ისეთი პრობლემებისთვის, როგორც არის შეუღლებულ სქემაში ნაკადის ლიმიტერების გამოყენება და ასევე პროგრამული კოდის იმპლემენტაცია ისე, რომ შესაძლებელი იყოს პარალელურ მანქანებზე გამოთვლა, პირდაპირი ადვექციის სქემისთვის უკვე არსებული გაპარალელების მეთოდის გამოყენებით.

2 ICON მოდელი

იკოსაედრული არა-ჰიდროსტატიკური ICON (ICOsahedral Non-hydrostatic) მოდელი არის გერმანული ამინდის სამსახურის და მაქს-პლანკის მეტეოროლოგიური ინსტიტუტის ერთობლივი პროექტი. პროექტის მიზანს წარმოადგენს ახალი თაობის ერთიანი მოდელის შექმნა, როგორც ამინდის როცხვითი პროგნოზირებისთვის, ასევე კლიმატის მოდელირებისთვის. ICON აერთიანებს ატმოსფერული და ოკეანის მოდელებს და ორივე კომპონენტების გამოყენება შესაძლებელია როგორც ცალ-ცალკე, ასევე ერთდროულადაც. პირველად მოდელირების ისტორიაში ატმოსფერული და ოკეანის მოდელები შემუშავებულია ერთ საერთო ბადაზე, ხოლო გერმანული ამინდის სამსახური ერთ-ერთია იმ თოთხმეტ ამინდის სამსახურებს შორის, რომელიც ამინდის როცხვითი პროგნოზირებისთვის იყენებს მაღალი რეზოლუციის მქონე გლობალურ და რეგიონულ მოდელს ბადის ლოკალურად გახშირების შესაძლებლობით. სხვა ამინდის სამსახურები შეზღუდულია სათვლელი ბადის მქონე მოდელებით, მათი ინტერესის არიდან გამომდინარე. ასეთი მოდელები დამოკიდებულია სასაზღვრო პირობებზე, რომლებიც აიღება სხვა გლობალური მოდელებიდან. ICON მოდელის ძირითადი უპირატესობებია:

- **განტოლებათა სისტემა:** არაჰიდროსტატიკური ატმოსფერული განტოლებების ამოსახსნელად, სიმულაცია შესაძლებელია მაღალი რეზოლუციით.
- **რიცხვითი მეთოდები:** გამოყენებულია ახალი მდგრადი რიცხვითი მეთოდები ადვექციის და უწყვეტობის განტოლებების ამოსახსნელად.
- **ბადა:** იკოსაედრული ბადა არის ახალი მიდგომა კლიმატის მოდელირებაში, რომელიც იძლევა ბადის გლობალურად და რეგიონალურად გახშირების საშუალებას.

- **ინფრასტრუქტურა:** ატმოსფეროს და ოკეანის მოდელებს აქვთ ერთნაირი ინფრასტრუქტურა შემავალი/გამომავალი მონაცემებისთვის.
- **პორტაბელურობა:** ICON მოდელის ინსტალაცია შესაძლებელია სხვადასხვა კომპიუტერულ სისტემაზე, როგორც პერსონალურ კომპიუტერებზე, ასევე გერმანული ამინდის სამსახურში გამოყენებულ მძლავრ კომპიუტერებზე.

ICON მოდელის წინამორბედი GME მოდელი, რომლის ოპერაციული გამოყენება დაიწყო 1999 წლის დეკემბერში, არის პირველი ოპერაციული ამინდის რიცხვითი პროგნოზირების მოდელი, რომელშიც გამოყენებული იქნა იკოსაედრული ბადე. ICON მოდელშიც შენარჩუნებული იქნა იკოსაედრული ბადის სტრუქტურა. ტრადიციულ გრძედი-განედი სტრუქტურის მქონე ბადესთან შედარებით, იკოსაედრულ ბადეს აქვს ის უპირატესობა, რომ იძლევა სფეროს დაფარვას თითქმის ერთგვაროვანი ბადით. შესაბამისად, ამით გადაწყვეტილია პოლუსებში სინგულარობის პრობლემა, სადაც მერიდიანები იკრიბებიან ერთ წერტილში.

ICON მოდელის 3-განზომილებიანი სფერული ბადე შედგება ორი ორთოგონალური კომპონენტისგან: ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ბადისგან. სათვლელი არე შეიძლება იყოს როგორც სრული სფეროს ზედაპირი და ვერტიკალური ბადე, ასევე რაიმე კონკრეტული რეგიონი სფეროზე შესაბამისი ვერტიკალური ბადით. ჰორიზონტალური ბადე წარმოადგენს სფეროს სამკუთხა ან ექვსკუთხა/ზუთკუთხა დისკრეტიზაციას. ბადის სამკუთხა სტრუქტურის გათვალისწინებით, გახშირებით მარტივად შეიძლება უფრო მაღალი რეზოლუციის ჰორიზონტალური ბადის მიღება. ამასთან შესაძლებელია როგორც გლობალური, ასევე რეგიონული ჰორიზონტალური ბადის გახშირება (სურ. 1). რეგიონული ბადის გახშირება შესაძლებელია, იქამდე სანამ სასურველი ჰორიზონტალური რეზოლუცია არ იქნება მიღწეული. ვერტიკალური ბადე მიიღება ვერტიკალური შრეების სიმრავლით, სადაც

თითოეულ შრეს აქვს 2-განზომილებიანი ჰორიზონტალური ბადის სტრუქტურა.

მოდელის მთავარი პროგნოზირებად ცვლადებს შორის არის ჰაერის სიმკვრივე, პოტენციალური ტემპერატურა, ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ქარის სიჩქარე და ტენიანობა. ამ ცვლადების მნიშვნელობების გამოთვლა ხდება ბადის ყველა წერტილში მოდელის 90 ვერტიკალურ შრეზე, დედამიწის ზედაპირიდან 75 კმ. სიმაღლემდე, რაც იძლევა მიახლოებით 265 მილიონ ბადის წერტილს.

ICON მოდელის ერთ-ერთი მთავარი კომპონენტია ტრანსპორტის მოდული, რომელიც თავის მხრივ მნიშვნელოვანი ნაწილია კლიმატის მოდულირებისთვის. სპეციალურად გადატანის განტოლების ამოსახსნელად, მოდულში იმპლემენტირებული არის ჰორიზონტალური და ვერტიკალური ადვექციის განტოლების ამოსახსნელი მაღალი რიგის სიზუსტის სქემები. ჰორიზონტალური სქემა დეტალურად არის განხილული 3 თავში.

მოდელის პროგრამული კოდი დაწერილია Fortran 90 და C პროგრამირების ენებზე. შემაგალი პარამეტრები კონტროლდება ფაილებიდან, Fortran 90-ის სინტაქსზე ე.წ. Namelist-ების საშუალებით. ხელმისაწვდომი კომპიუტერული რესურსების მაქსიმალურად გამოსაყენებლად და დროითი რესურსების დაზოგვის მიზნით, შესაძლებელია გამოთვლების განხორციელება პარალელურ მანქანებზე. გამოთვლების გაპარალელებისთვის გამოიყენება Message Passing Interface (MPI).

ICON მოდელი 2015 წლის იანვრიდან ოპერაციულად გამოიყენება გერმანული ამინდის სამსახურში. პირველი 6 თვის განმავლობაში გამოიყენებოდა მხოლოდ გლობალური სიმულაციებისთვის 13 კმ. რეზოლუციის ჰორიზონტალური და 90-შრიანი ვერტიკალური ბადით. ამავე წლის 21 ივლისიდან კი დაემატა სიმულაციები ევროპის არეზე რეგიონალური გახშირებით.



სურ 1: გლობალური ბადე გახშირებული რეგიონალური ბადით ((1)).

3 ჰორიზონტალური ადვექცია

რაიმე q ტრასერის გადაადგილება აღიწერება კერძოწარმოებულიანი უწყვეტი განტოლებით

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} + \nabla(\rho q v) = 0, \quad (1)$$

სადაც ρ არის ნაკადის სიმკვრივე, ხოლო v ვექტორი არის სინქარის ვექტორი. მოცემული განტოლების რიცხვითი ამონახსნი ეფუძნება ე.წ. დროით-სივრცით სასრული მოცულობების მეთოდს. ამ რიცხვითი მეთოდით დროითი და სივრცითი დისკრეტიზაცია ხდება არა ცალ-ცალკე, არამედ კომბინირებულია ერთ მეთოდად. ასეთი მეთოდები ცნობილია სათვლელ არეზე ინტეგრებადი ნახევრად-ლაგრანჟიანი სქემების სახელითაც, რადგან არც წმინდა ნახევრად-ლაგრანჟის სქემაა და არც ეილერის კლასიკური გაგებით. ერთის მხრივ, ეილერის მეთოდია იმ აზრით, რომ განიხილება სათვლელი არის საზღვრებზე შემომავალი მასის ნაკადები. ხოლო მეორეს მხრივ ნახევრად-ლაგრანჟიანი სქემაა იმ გაგებით, რომ ნაკადის გამოსათვლელად ტრაექტორიების გამოთვლაცაა საჭირო. ზოგიერთ ლიტერატურაში ასეთი სქემები მოიხსენიება როგორც *ნაკადის ფორმის ნახევრად ლაგრანჟიანი სქემები (Flux Forms Semi-Lagrangian)*. ICON მოდელში ადვექციის განტოლების ამოსახსნელად გამოყენებული რიცხვითი სქემები ეფუძ-

ნება (11), (5), (12), (2) ნაშრომებს ჰორიზონტალურ მიმართულებით ადვექციისთვის და (13) ნაშრომს ვერტიკალური ადვექციისთვის.

ვინაიდან დისკრეტიზაციისთვის განვიხილავთ სასრული მოცულობების მეთოდს, ნებისმიერი სკალარული ϕ ცვლადისთვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\bar{\phi}_i^n = \frac{1}{\Delta V_i} \iiint_{V_i} \phi dV,$$

სადაც ΔV_i არის რაიმე სათვლელი ბადის უჯრის მოცულობა.

3.1 მიმართულებების მიხედვით გახლეჩვა

1 განტოლების სივრცეში ინტეგრებისას სათვლელ სამკუთხედზე და რაიმე Δt დროითი ბიჯით დროში ინტეგრებისას, ამონახსნი შეიძლება დაიწეროს შემდეგი სახით

$$\bar{\rho q}^{n+1} = \bar{\rho q}^n + \Delta t[\mathcal{H}(q^n) + \mathcal{V}(q^n)], \quad (2)$$

სადაც \mathcal{H} და \mathcal{V} აღნიშნავს ჰორიზონტალურ და ვერტიკალურ ადვექციის ოპერატორებს, რომლებიც მოდებულია q^n -ზე, ხოლო $\bar{\rho q}^{n+1}$ არის მნიშვნელობა სათვლელ უჯრაში დროის ახალ $n + 1$ მომენტში.

განტოლების სრულად ამოხსნის ნაცვლად, ICON მოდელში ეს განტოლება ამოიხსნება ცალ-ცალკე ჰორიზონტალური და ვერტიკალური მიმართულებებისთვის. (2) განტოლება შეიცვლება მისი მიახლოებითი განტოლებებით

$$\bar{\rho q}^* = \bar{\rho q}^n + \Delta t \mathcal{V}(q^n), \quad (3a)$$

$$\bar{\rho q}^{n+1} = \bar{\rho q}^* + \Delta t \mathcal{H}(q^*), \quad (3b)$$

(3) განტოლების თავის მხრივ შემოაქვს ცდომილება, რომელსაც გახლეჩვის ცდომილება ეწოდება. $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ სიზუსტის რიგის შესანარჩუნებლად, მომდევნო დროით ბიჯზე განტოლებები იხსნება შებრუნებული თანმიმდევრობით. ამ მიდგომას შეიძლება ეწოდოს გარკვეულწილად სტრანგის გახლეჩვა (strang). მოდელში შესაძებელია სრული სტრანგის გახლეჩვის მეთოდის

გამოძახებაც, ისევე როგორც მარჩუკის მეთოდით გახლეჩვა. ჰორიზონტალური ადვექციის ამოსახსნელად ICON მოდელში გამოყენებული რიცხვითი სქემა ეფუძნება (2) და (12) ნაშრომებს. შესაძლებელია მეორე რიგის მიურას სქემის გამოყენება, ასევე მიურას სქემის მესამე რიგის რეკონსტრუქციით.

3.2 მიურას სქემა

განვიხილოთ ნაკადის ფორმით ჩაწერილი ადვექციის განტოლება რაიმე q ტრასერისთვის, ρ სიმკვრივისთვის და v_h ჰორიზონტალური სიჩქარისთვის

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho q) + \nabla_h(\rho q v_h) = 0. \quad (4)$$

ვთქვათ, ეს განტოლება მოცემულია არასტრუქტურირებულ ექვსკუთხა ჰორიზონტალურ ბადეზე, სადაც P_0 არის ბადეზე მოცემული სათვლელი წერტილი, ხოლო P'_i არის ექვსკუთხედის წვეროები. q_i -ს და ρ_i -ს მნიშვნელობები მოცემულია სათვლელ წერტილებში, ხოლო v_i სიჩქარის მნიშვნელობები მოცემულია ექვსკუთხედის წვეროებში. მიურას მეთოდის იდეა მდგომარეობს იმაში, რომ ჯერ გამოვთვალოთ ამ ვექტორების და სკალარების მიახლოებითი მნიშვნელობები ექვსკუთხედების წიბოების შუა წერტილებში, ხოლო ამის შემდეგ P_0 სათვლელი წერტილისთვის გამოვიყენოთ

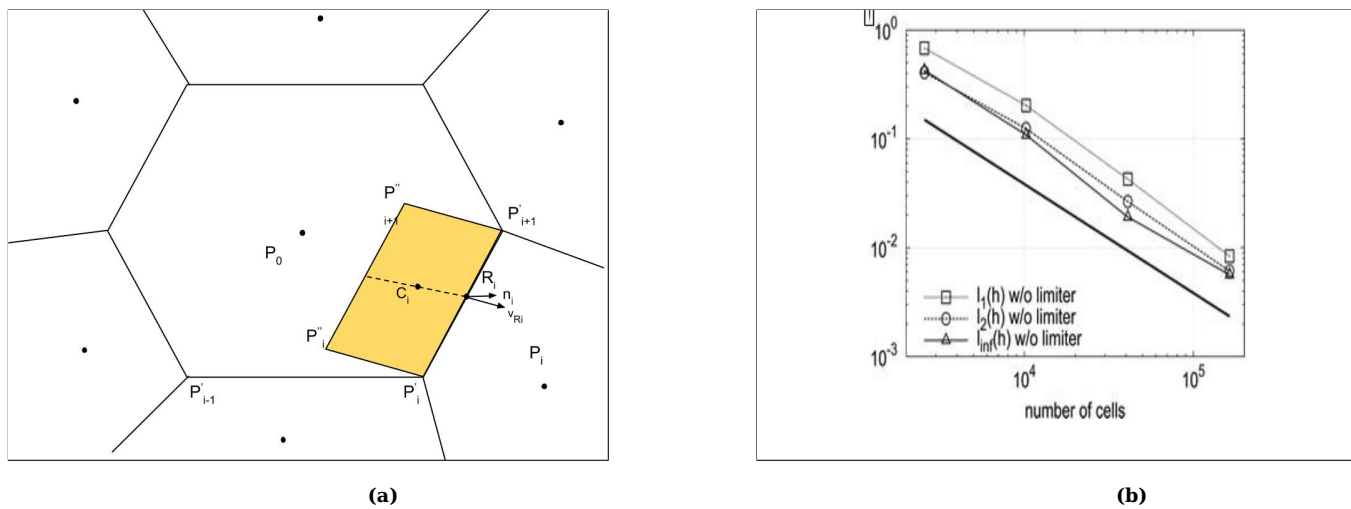
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 q_0) = -\frac{1}{A_0} \sum_{i=1}^{N_s} (l_i \rho_{R_i} q_{R_i} v_{R_i} \cdot n_i). \quad (5)$$

A_0 არის სათვლელი ექვსკუთხედის ფართობი, N_s არის წიბოების რაოდენობა, ხოლო n_i არის ერთეულოვანი ვექტორი მოცემული წიბოს შუა წერტილში. ნაკადის სიჩქარის v_i ვექტორის მიახლოებითი მნიშვნელობა წიბოს R_i შუაწერტილში იქნება

$$v_{R_i} = \frac{v_i + v_{i-1}}{2}. \quad (6)$$

მთავარ ამოცანას წარმოადგენს p_i და q_i ცვლადების მიახლოებითი მნიშვნელობების პოვნა წიბოების შუა წერტილებში.

დავუშვათ, დროის t მომენტიდან $t+\Delta t$ მომენტამდე $P_i'' P_{i+1}''$ წიბო გადაადგილდება $v_{R_i}^{t+\Delta t}$ სიჩქარით და ემთხვევა $P_i' P_{i+1}'$ წიბოს. თუ $P_i'' P_{i+1}'' P_i P_{i+1}$ -ს განვიხილავთ როგორც პარალელოგრამს, მაშინ ამ პარალელოგრამის შიგნით არსებული ტრასერის რაოდენობა არის $P_i P_{i+1}$ წიბოში შემავალი ნაკადის მიახლოებითი მნიშვნელობა Δt დროითი ბიჯის შემდეგ.



სურ 2: (a) ექვსკუთხა სათვლელი უჯრა, $P_i' P_{i+1}'$ წიბოში გამავალი ნაკადის მიახლოებითი მნიშვნელობა არის $P_i' P_{i+1}' P_i'' P_{i+1}''$ პარალელოგრამში არსებული ნაკადის რაოდენობა, C_i არის მასის ცენტრი. (b) ცდომილების ნორმების წერტილების რაოდენობაზე დამოკიდებულება. წყარო: (2)

ნაკადის სიმკვრივე ρ_{R_i} -ს და ტრასერი q_{R_i} -ს მიახლოებითი მნიშვნელობა C_i პარალელოგრამის ბარიცენტრში აღვნიშნოთ შესაბამისად, ρ_{C_i} -თი და q_{C_i} -თი. C_i -ს მდებარეობა განისაზღვრება უკუტრაექტორიის გამოთვლით

$$C_i = R_i - v_{R_i}^{t+\Delta t/2} \frac{\Delta t}{2}. \quad (7)$$

ρ_{C_i} და q_{C_i} -ს მიახლოებითი მნიშვნელობის გამოთვლა შესაძლებელია values of ρ -ს და q -ს მნიშვნელობების და ასევე სათვლელ წერტილში გრადიენტის მნიშვნელობის გამოყენებით. ვინაიდან წიბოსთან ორი სათვლელი წერტილი მდებარეობს, სათვლელი წერტილის შერჩევა დამოკიდებულია სიჩქარის მიმართულებაზე. მოცემული მაგალითისთვის გვექნება ასეთი მიახლო-

ებითი მნიშვნელობები:

$$\rho_{C_i} = \rho_0 + (\nabla \rho)_{P_0}(C_i - P_0), \quad (8)$$

$$q_{C_i} = q_0 + (\nabla q)_{P_0}(C_i - P_0). \quad (9)$$

მონოტონურობის მისაღებად შესაძლებელია ლიმიტერების მოდება ρ_{R_i} -სა და q_{R_i} -ზე. საბოლოოდ, Δt დროითი ბიჯისთვის გვექნება

$$\rho_0^{t+\Delta t} q_0^{t+\Delta t} = \rho_0^t q_0^t - \frac{\Delta t}{A_0} \sum_{i=1}^{N_s} (l_i) \rho_{C_i} q_{C_i} v_{R_i}^{t+\Delta t/2} n_i$$

თუ ლიმიტერები არ გამოიყენება, მაშინ მიუზრას სქემა არის მეორე რიგის სიზუსტის (სურ. 2).

4 ადვექციის განტოლება სფეროზე

განვიხილოთ ისევ წრფივი ადვექციის განტოლება კონსერვატიულ ფორმაში:

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q \vec{v}) = 0, \quad (10)$$

სფეროს Ω ზედაპირზე. მაშინ $\vec{v} = (v_\lambda, v_\theta)^T$ ვექტორი იქნება ორგანზომილებიანი სფეროზე კოორდინატული ქარის სიჩქარის ვექტორი, ხოლო $\nabla \cdot$ ოპერატორი არის სფერული კოორდინატული დივერგენციის ოპერატორი და მოიცემა შემდეგი სახით

$$\nabla \cdot v = \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \right], \quad (11)$$

სადაც $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ არის გრძედი ხოლო $-\pi \leq \theta \leq \pi$ განედი. სიმარტივისთვის სფეროს R რადიუსი ავიღოთ 1-ის ტოლი.

$\rho = \rho(t, \lambda, \theta) > 0$ და $v = v(t, \lambda, \theta)$ არის მოცემული საკმარისად გლუვი ფუნქციები, ხოლო $q = q(t, \lambda, \theta)$ არის უცნობი ფუნქცია რომელიც უნდა განისაზღვროს მოცემული განტოლებიდან და ასევე წინასწარ მოცემული საწყისი პირობის მიხედვით:

$$q(0, \lambda, \theta) = q_0(\lambda, \theta), \quad (12)$$

სადაც $q_0(\lambda, \theta)$ -იც არის ასევე საკმარისად გლუვი ფუნქცია.

საწყისი პირობა (12) მოცემულია სფეროს ზედაპირზე, შესაბამისად, საწყისი პირობა საკმარისია და არ არის საჭირო სასაზღვრო პირობების ცოდნა.

4.1 ჰორიზონტალური ადვექციის სქემის ძირითადი ალგორითმი

განვიხილოთ ICON მოდელიში გამოყენებული ჰორიზონტალური ადვექციის ამოსახსნელი რიცხვითი მეთოდის ძირითადი ალგორითმი.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho q) + \nabla_h(\rho q v_h) = 0 \quad (13)$$

2-განზომილებიან უწყვეტ ნაკადის ფორმით ჩაწერილ განტოლებაში ∇_h არის ჰორიზონტალური დივერგენციის ოპერატორი. განტოლების ამოსახსნელად რიცხვითი გამოთვლები ხდება ლოკალურ 2-განზომილებიან სიბრტყეზე, რომელიც მიიღება ბადის სამკუთხა უჯრის წერტილების კოორდინატების სამკუთხედის წიბოს შუაწერტილზე გავლებულ მხებ სიბრტყეზე გნომონური პროექციით დაგეგმილებით. სათვლელი არე (Control volume) არის სამკუთხა ბადის უჯრები. მასის ცენტრში დისკრეტული მნიშვნელობა q_i, ρ_i არის სათვლელ არეზე გასაშუალოებული :

$$\bar{q}_i^n = \frac{1}{\Delta A_i} \iint_{A_i} q(x, y, t_n) dA. \quad (14)$$

ვანტეგროთ (13) განტოლება A_i სამკუთხედზე, რომელიც მოცემულია მხებ სიბრტყეზე.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A_i} (\rho q) dA + \iint_{A_i} \nabla(v \rho q) dA = 0, \quad (15)$$

ტოლობის მეორე ნაწილში გამოვიყენოთ გაუსის თეორემა:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{A_i} (\rho q) dA + \oint_{\partial A_i} (v \rho q) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (16)$$

∂A_i -თი აღვნიშნეთ A_i სამკუთხედის საზღვარი, ხოლო ვექტორი \vec{n} არის ერთეულოვანი ნორმალის ∂A_i -ზე. ჩავსვათ (14) ტოლობა (16) ტოლობაში:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\Delta A_i} \left(\iint_{A_i} \rho q dA \right) \cdot \Delta A_i \right] + \oint_{\partial A_i} (v \rho q) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} q \cdot \Delta A_i) + \oint_{\partial A_i} (v \rho q) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (18)$$

ვაინტეგრირებთ (18) ტოლობა დროში t_n -დან t_{n+1} -მდე:

$$\bar{\rho} q^{n+1} \cdot \Delta A_i = \bar{\rho} q^n \cdot \Delta A_i - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \oint_{\partial A_i} (v \rho q) \cdot \vec{n} dS = 0. \quad (19)$$

$$\bar{\rho} q^{n+1} \cdot \Delta A_i = \bar{\rho} q^n \cdot \Delta A_i - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{L_i^e} (v \rho q) \cdot \vec{n} dL dt. \quad (20)$$

ΔA_i არის A_i სამკუთხედის ფართობი, N_e არის e წიბოების რაოდენობა, ხოლო L_i^e არის i სამკუთხედის წიბო. თუ დავუშვებთ, რომ ρ -ს დროსა და სივრცეში გასაშუალოებული მნიშვნელობა ცნობილია, მაშინ (19) განტოლება გადაიწერება ასე

$$\bar{\rho} q^{n+1} \cdot \Delta A_i = \bar{\rho} q^n \cdot \Delta A_i - \sum_{e=1}^{N_e} \langle \bar{\rho}_i^e \rangle \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{L_i^e} (v q) \cdot \vec{n} dL dt. \quad (21)$$

$\langle \dots \rangle$ არის დროში გასაშუალოებული მნიშვნელობა. ვაინტეგრირებთ განტოლებას $n\Delta t$ -დან $n\Delta t + \Delta t$ -მდე, შემდეგ კი დროითი ინტეგრალი გარდავქმნათ სივრცით ინტეგრალად ტრანექტორიების გასწვრივ:

$$\bar{\rho} q^{n+1} \Delta A_i = \bar{\rho} q^n \Delta A_i - \sum_{e=1}^{N_e} F_e \quad (22)$$

F_e არის სამკუთხედის წიბოში შემავალი/გამავალი ნაკადი:

$$F_e = s_{i,e} \cdot \langle \bar{\rho}_i^e \rangle \iint_{a_i^e} q^n(x, y) da, \quad s_{i,e} = \pm 1. \quad (23)$$

მთავარი ამოცანა არის ახლა Δt დროის განმავლობაში e^{th} წიბოში გამავალი F_e ნაკადის პოვნა.

$$\bar{\rho} q^{n+1} = \bar{\rho} q^n - \frac{1}{\Delta A_i} \sum_{e=1}^{N_e} s_{i,e} \cdot \langle \bar{\rho}_i^e \rangle \iint_{a_i^e} q^n(x, y) da, \quad s_{i,e} = \pm 1 \quad (24)$$

a_i^e არის ნაკადის არე და სრული მასა გამოითვლება ამ არეში, $\langle \bar{\rho}_i^e \rangle$ არის ρ დროსა და სივრცეში გასაშუალოებული მნიშვნელობა. ძირითადი რიცხვითი ალგორითმი შედგება ოთხი ეტაპისგან:

1. ნაკადის a_i^e არის მიახლოებითი მნიშვნელობის პოვნა ყველა წიბოსთვის
2. მიახლოებითი $q^R(x, y, t_n)$ -ს პოვნა უცნობი $q(x, y, t_n)$ ტრასერისთვის წიბოს R შუა წერტილში, თითოეული სათვლელი სამკუთხედისთვის.
3. ინტეგრება ნაკადის არეზე, თითოეულ წიბოში შემავალი მასის განსასაზღვრად.
4. ნაკადების შეკრება და ტრასერის განახლება

სამკუთხედზე გასაშუალოებული მნიშვნელობა განისაზღვრება როგორც $\bar{q}_i^{a_i^e, n} = \frac{1}{\Delta a_i^e} \iint_{a_i^e} q^n(x, y) da$. (24) განტოლება გადაიწერება როგორც:

$$\bar{\rho} q^{n+1} = \bar{\rho} q^n - \frac{1}{\Delta A_i} \sum_{e=1}^{N_e} s_{i,e} \cdot \langle \bar{\rho}_i^e \rangle \Delta a_i^e \bar{q}_i^{a_i^e, n}. \quad (25)$$

გადატანილი Δa_i^e არის მიახლოებითი მნიშვნელობა გამოითვლება როგორც $\Delta a_i^e = l_i^e \langle v_{n,i}^e \rangle \Delta t$. (25) განტოლებიდან მიიღება:

$$\bar{\rho} q^{n+1} = \bar{\rho} q^n - \frac{1}{\Delta A_i} \sum_{e=1}^{N_e} s_{i,e} \cdot \langle \bar{\rho}_i^e \rangle l_i^e \langle v_{n,i}^e \rangle \Delta t \bar{q}_i^{a_i^e, n}. \quad (26)$$

$\langle \bar{\rho}_i^e \rangle \langle v_{n,i}^e \rangle$ ჩანაცვლდა მასის ნაკადით და საბოლოოდ პრობლემა დაიყვანება $\bar{q}_i^{a_i^e, n}$ -ის პოვნაზე.

რომ შევაჯამოთ, მოკლედ ალგორითმით საპოვნელია

$$\bar{\rho} q^{n+1} = \bar{\rho} q^n - \frac{1}{\Delta A_i} \sum_{e=1}^{N_e} s_{i,e} \cdot \langle \bar{\rho}_i^e \rangle \iint_{a_i^e} q^n(x, y) da, \quad s_{i,e} = \pm 1 \quad (27)$$

რომლისთვისაც გამოიყენება:

1. 2D პოლინომიალური მიახლოება $q^n(x, y) = \sum_{j+k \leq \kappa} C^{(j,k)} x^j y^k$, $\kappa \in [1, 2, 3]$.
2. გაუს-ლეჟანდრის კვადრატურა $\iint_{a_i^e} q^n(x, y) da$

3. უმცირეს კვადრატთა მეთოდით უცნობი $C^{(j,k)}$ კოეფიციენტების საპოვნელად.

5 ვარიაციული მონაცემთა ასიმილაცია

ამინდის რიცხვით პროგნოზირებაში ფართოდ გამოყენებადი მონაცემთა ასიმილაცია წარმოადგინება 4-განზომილებიანი მონაცემთა ასიმილაციის ალგორითმით. 4-განზომილებიანი მონაცემთა ასიმილაციას ასევე გამოყენება აქვს ატმოსფერულ ქიმიური ტრანსპორტის მოდელებშიც. ზოგადად, 4D ასიმილაციის მეთოდის მიზანია რიცხვითი მოდელის საუკეთესი პარამეტრიზაციის ან საწყისი მონაცემის პოვნა ვარიაციული კალკულუსის გამოყენებით.

მიზანს წარმოადგენს მოდელის რაიმე ცვლადის საუკეთესო მიახლოების პოვნა, წინასწარ ცნობილი რაიმე ინფორმაციის და დაკვირვებების გათვალისწინებით.

5.1 ფუნქციონალი

განვიხილოთ ფუნქციონალი შემდეგი უწყვეტი სახით:

$$J(q_0) = f^b(q_0, q^b) + \int_0^T \int_{\Omega} f^o(q, q^o, t, \lambda, \theta) d\lambda d\theta dt, \quad (28)$$

სადაც q_0 არის შესაბამისად საწყისი მონაცემების ფუნქცია საწყისი პირობიდან (12); $q^b = q^b(\lambda, \theta)$ მოცემულია და არის ბექგრაუნდ ინფორმაციის ფუნქცია, რომელიც გამოიყენება როგორც საწყისი მიახლოება $J(q_0)$ -ის q_0 -ს მიმართ მინიმიზაციის იტერაციულ მეთოდში, q^o არის დაკვირვებების ფუნქცია. ფუნქცია f^b ამ შემთხვევაშიც აღნიშნავს სხვაობას საწყის და ბექგრაუნდ ფუნქციებს შორის, ხოლო f^o აღწერს განსხვავებას ტრასერსა და დაკვირვებებს შორის. ჩავთვალოთ, რომ f^b და f^o არის საკმარისად გლუი

ფუნქციები. მაშინ f^b -სა და f^o -ს გრადიენტები q_0 -ის მიმართ აღნიშნულია შესაბამისად $\nabla_{q_0} f^b$ და $\nabla_{q_0} f^o$ -თი და ასევე ჩავთვალოთ რომ მათი გამოთვლა ანალიზურად შესაძლებელია.

ვარიაციულ მონაცემთა ასიმილაციის ამოცანებში ფუნქციონალი უმეტეს შემთხვევაში განიხილება დისკრეტული ან ნახევრად დისკრეტული ფორმით. ფუნქციონალი დისკრეტული ფორმით განხილულია (15), (24), (25) სამეცნიერო ლიტერატურაში, ხოლო ნახევრად დისკრეტული ფორმით მოცემულია (26), (24), (27) ლიტერატურაში.

ნახევრად დისკრეტულ ფუნქციონალში იგულისხმება ფუნქციონალი, სადაც დროში ინტეგრება უწყვეტად არის მოცემული. ჯერ განვიხილოთ დამოკიდებულება დისკრეტულ, ნახევრად-დისკრეტულ და უწყვეტ ფუნქციონალს შორის, რომელიც შემდეგ საჭირო იქნება აგებული რიცხვითი სქემების კრებადობის შესასწავლად. შემოვიტანოთ დამოუკიდებელ და დამოკიდებულ ცვლადთა დროში და სივრცეში დისკრეტიზაცია. ვინაიდან განვიხილავთ სასრული მოცულობების სქემებს, Ω_j -თი ავლნიშნოთ სასრული მოცულობის j უჯრა, $\cup_{j=1}^{N_c} \Omega_j = \Omega$, სადაც $|\Omega_j|$ არის Ω_j უჯრის ფართობი, ხოლო N_c არის სათვლელი უჯრების რაოდენობა. q ფუნქციის საშუალო მნიშვნელობა Ω_j -ზე დროის t მომენტში აღინიშნება $q_j(t)$ -თი. იგივე მნიშვნელობა დროის $t = t_n$ მომენტში აღინიშნება q_j^n -ით, $t_n = n\Delta t, n = 0, 1, \dots, N_T$, სადაც $\Delta t = T/N_T$ არის დროითი დისკრეტიზაციის ბიჯი, N_T არის დროითი ბიჯების რაოდენობა. მონაცემთა ასიმილაციის ამოცანაში ყველა დისკრეტული ფუნქციის მნიშვნელობა დროის t მომენტში წარმოდგენილია ვექტორების სახით, მაგალითად, $\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))^T$, $\vec{q}^n = (q_1^n, q_2^n, \dots, q_{N_c}^n)^T$, ვინაიდან ასეთი აღნიშვნები უფრო მოსახერხებელია ფუნქციონალის ფორმულირებისას. ამ სახის აღნიშვნების შემოღებით ნახევრად დისკრეტული

ფუნქციონალი (27)-დან დაიწერება როგორც:

$$J(\vec{q}_0) = \frac{1}{2}(\vec{q}^b - \vec{q}_0)^T B^{-1}(\vec{q}^b - \vec{q}_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{N_T}} (\vec{q}^o(t) - H[\vec{q}(t)])^T R^{-1}(\vec{q}^o(t) - H[\vec{q}(t)]) dt, \quad (29)$$

სადაც B და R მატრიცები შესაბამისად არის ბექგრაუნდ და დაკვირვების ცდომილების კოვარიაციის მატრიცები, $\vec{q}^o(t) = (q_{i_1}^o(t), q_{i_2}^o(t), \dots, q_{i_{N_o}}^o(t))^T$, $1 \leq i_k \leq N_c, k = 1, 2, \dots, N_o$, N_o არის დაკვირვებების რაოდენობა სადაც $N_o < N_c$. H ოპერატორი მოდელის სივრცეს აპროექცირებს დაკვირვებების სივრცეში ისე, რომ ჩვენი ასიმილაციის ეხპერიმენტში "in-situ" დაკვირვებები პრაქტიკულად ნიშნავს შემდეგს: $H[\vec{q}(t)] = (q_{i_1}(t), q_{i_2}(t), \dots, q_{i_{N_o}}(t))^T$. \mathcal{O} -ით აღნიშნულია დაკვირვებების შესაბამისი ინდექსების სიმრავლე, $\mathcal{O} = \{i_1, i_2, \dots, i_{N_o}\}$

ფუნქციონალი სრულად დისკრეტული სახით (28)-ის მიხედვით დაიწერება როგორც:

$$J(\vec{q}_0) = \frac{1}{2}[\vec{q}^b - \vec{q}_0]^T B^{-1}[\vec{q}^b - \vec{q}_0] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N_T} [\vec{q}^{on} - H(\vec{q}^n)]^T R^{-1}[\vec{q}^{on} - H(\vec{q}^n)]. \quad (30)$$

თუ ჩავთვლით, რომ B and R მატრიცები ისევეა აღებული როგორც (45)-სა და (30)-ში, მაშინ ნახევრად-დისკრეტული და დისკრეტული ფუნქციონალების თავსებადობა მოითხოვს, შემდეგ მოდიფიკაციებს:

$$J(\vec{q}_0) = \frac{1}{2}[\vec{q}^b - \vec{q}_0]^T B^{-1}[\vec{q}^b - \vec{q}_0] + \frac{T}{2N_T} \sum_{n=0}^{N_T} [\vec{q}^{on} - H(\vec{q}^n)]^T R^{-1}[\vec{q}^{on} - H(\vec{q}^n)]. \quad (31)$$

აღსანიშნავია, რომ (45) და (31) თავსებადია, რადგან როდესაც დისკრეტული ფუნქციონალის (31) ზღვარი $N_T \rightarrow \infty$ ზღვარი ემთხვევა ნახევრად-დისკრეტულ ფუნქციონალს (45). კოვარიაციის მატრიცების შესწავლა სცდება ნაშრომის მიზნებს, ამიტომ ზოგადობის შეუზღუდავად და მოხერხებულობისთვის, კოვარიაციის მატრიცების შებრუნებულები შეცვლილია რაიმე დადებითად განსაზღვრული $K_b(\xi, \xi')$ და $K_o(\xi, \xi')$, $\xi, \xi' \in \Omega$, $\xi = (\lambda, \theta)$,

$\xi' = (\lambda', \theta')$ -თი, და განვსაზღვრავთ f^b ფუნქციას (28)-დან შემდეგნაირად:

$$f^b(q_0, q^b) = \frac{1}{2|\Omega|^2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} K_b(\xi, \xi') [q_0(\xi) - q^b(\xi)] [q_0(\xi') - q^b(\xi')] d\xi d\xi'. \quad (32)$$

(32)-ის სტანდარტული დისკრეტიზაციის შემდეგ გვაქვს:

$$J^b = \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} \frac{|\Omega_i||\Omega_j|}{2|\Omega|^2} K_b(\xi_i, \xi'_j) [q_{0j} - q_i^b] [q_{0j} - q_j^b] = \frac{1}{2} [\vec{q}^b - \vec{q}_0]^T K^b [\vec{q}^b - \vec{q}_0], \quad (33)$$

სადაც K^b არის სიმეტრიული დადებითად განსაზღვრული მატრიცა

$$K_{ij}^b = \frac{|\Omega_i||\Omega_j|}{2|\Omega|^2} K_b(\xi_i, \xi'_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, N_c.$$

ამიტომ დისკრეტულისა და უწყვეტი ფუნქციონალის ბექგრაუნდ (32) და (33) ნაწილებს შორის მდგრადობა უზრუნველყოფილია, ანუ $\lim_{N_c \rightarrow \infty} J^b = f^b$. ასეთი ფორმულირება საშუალებას იძლევა შევისწავლოთ ბადის გახშირების ზეგავლენა მონაცემთა ასიმულაციის ამოცანაზე.

(33)-ის ანალოგიურად განსაზღვრულია J^o და მისი უწყვეტი ვერსია:

$$J^o = \frac{T}{2N_T} \sum_{n=0}^{N_T} \sum_{i \in \mathcal{O}} \sum_{j \in \mathcal{O}} \frac{|\Omega_i||\Omega_j|}{2|\Omega^o|^2} K_o(\xi_i, \xi'_j) [q_i^{on} - q_i^n] [q_j^{on} - q_j^n] = \frac{T}{2N_T} \sum_{n=0}^{N_T} [q^{on} - H(q^n)]^T H$$

$$f^o(q, q^o, t, \xi) = \begin{cases} \frac{[q(t, \xi) - q^o(t, \xi)]}{2|\Omega^o|^2} \int_{\Omega^o} K_o(\xi, \xi') [q(t, \xi') - q^o(t, \xi')] d\xi', & \xi \in \Omega^o, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში,} \end{cases} \quad (35)$$

სადაც

$$K_{ij}^o = \frac{|\Omega_i||\Omega_j|}{2|\Omega^o|^2} K_o(\xi_i, \xi'_j), \quad i, j \in \mathcal{O}, \quad \Omega^o = \cup_{i \in \mathcal{O}} \Omega_i.$$

შესაბამისად გვაქვს

$$\nabla_q f^o(q, q^o, t, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{|\Omega^o|^2} \int_{\Omega^o} K_o(\xi, \xi') [q(t, \xi') - q^o(t, \xi')] d\xi', & \xi \in \Omega^o, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (36)$$

აღსანიშნავია, რომ (35)-ში დაგუშვით რომ დაკვირვებები მოცემულია ქვეარეებზე Ω^o , $|\Omega^o| > 0$.

5.2 დისკრეტული ფუნქციონალი, გრადიენტი და ფუნქციონალის პრეკონდიცია

მოდელის x ცვლადსა და დანარჩენ წინასწარ მოცემულ x_b ინფორმაციას და y დაკვირვებებს შორის სხვაობის აღსაწერად გამოიყენებული ფუნქციონალი ჩავწეროთ შემდეგი დისკრეტული სახით

$$J(x) = \frac{1}{2}(x_b - x)^T B^{-1}(x_b - x) + \frac{1}{2}(y - H(x))^T R^{-1}(y - H(x)), \quad (37)$$

სადაც $x_b \in \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$, ხოლო $y \in \mathbb{R}^M$. N არის მოდელის საწყისი მონაცემის განზომილება, M არის დაკვირვების ინფორმაციის განზომილება. $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$ არის წინასწარ ცნობილი ინფორმაციის ცდომილების კოვარიაციის მატრიცა და $R \in \mathbb{R}^{M \times M}$ არის დაკვირვებების ცდომილების კოვარიაციის მატრიცა. H დაკვირვებების ოპერატორი ასახავს მოდელის მნიშვნელობებს მოდელის სივრციდან დაკვირვებების სივრცეში. (37) ფორმულა აღწერს სტანდარტულ 3D ვარიაციულ მონაცემთა ასიმილაციას, სადაც სისტემის დროში ცვლილება არ არის გათვალისწინებული. 4D ვარიაციულ მონაცემთა ასიმილაციაში დროითი ცვლილების ჩართვა ხდება ასიმილაციის ფანჯარაში მოცემული ყველა დაკვირვებების იმავე დროის მომენტში მოდელის მონაცემთან შედარებით და ამ ინფორმაციის ინტეგრებით დროში ამასთან თუ ფუნქციონალს გადავწერთ ნაზრდის სახით ((14)), სადაც $x(t_0) = x_b(t_0) + \delta x(t_0)$ და $d(t_i) = y(t_i) - \mathbf{H}M_i x_b(t_i)$, მაშინ გვექნება

$$J(\delta x(t_0)) = \frac{1}{2}(\delta x(t_0))^T B^{-1}(\delta x(t_0)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (d(t_i) - \mathbf{H}M_i \delta x(t_0))^T R^{-1}(d(t_i) - \mathbf{H}M_i \delta x(t_0)) \quad (38)$$

ფუნქციონალი განსაზღვრულია დროის $[t_0, t_N]$ მონაკვეთზე. H არის გაწრფივებული დაკვირვებების ოპერატორი, ხოლო M_i არის ინტეგრების ოპერატორის წრფივი მოდელი, $M_i = M_{t_i} M_{t_i - \Delta t} \dots M_{\Delta t}$.

(15) -ის მიხედვით, შესაძლებელია ერთდროულად საწყისი მონაცემისა და ემისიის ფაქტორის ერთდროულად ოპტიმიზაცია. დავამატოთ ფუნქციონ-

ნალში ემისიის ფაქტორთან დაკავშირებული წევრები $K \in \mathbb{R}^{E \times E}$ ემისიის ცდომილების კოვარიაციის მატრიცა და ემისიის პერტურბაცია δu :

$$J(\delta x(t_0), \delta u) = J_b + J_o + J_e = \frac{1}{2}(\delta x(t_0))^T B^{-1}(\delta x(t_0)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{d}(t_i) - \mathbf{H}\mathbf{M}_i \delta x(t_i))^T R^{-1}(\mathbf{d}(t_i) - \mathbf{H}\mathbf{M}_i \delta x(t_i)) + \frac{1}{1}(\delta u)^T K^{-1}(\delta u). \quad (39)$$

E აღნიშნავს ემისიის ფაქტორების რაოდენობას, ხოლო δu არის სხვაობა მოდიფიცირებულ e ემისიასა და წინასწარ მოცემულ e_b ემისიას შორის.

ფუნქციონალის მინიმიზაციისთვის საჭიროა მისი გრადიენტის პოვნა

$$\nabla J = B^{-1} \delta x(t_0) - \sum_{i=t_0}^{t_N} \mathbf{M}_i^* \mathbf{H}^T R^{-1}(\mathbf{d}(t_i) - \mathbf{H}\mathbf{M}_i \delta x(t_i)) + K^{-1} \delta u \quad (40)$$

M^* არის გაწრფივებული პირდაპირი მოდელის შესაბამისი შეუღლებული მოდელი. შეუღლებული მოდელი აინტეგრებს უკან დროში სხვაობას დაკვირვებასა და მოდელს შორის დროის t_N მომენტიდან საწყის t_0 მომენტამდე. H^T ოპერატორი ასახავს ვექტორს დაკვირვებების სივრციდან მოდელის სივრცეში. რაც უფრო მცირეა ფუნქციონალის მნიშვნელობა, მით უკეთესი მიახლოებით არის ნაპოვნი მოდელის საწყისი მონაცემი. პრაქტიკაში მინიმიზაციისთვის ხშირად გამოიყენებენ კვაზი-ნოუტონის მეთოდებს. რეალურ ამოცანებში მოდელის განზომილება მიახლოებით $O(10^6)$ რიგისაა, შესაბამისად B და K კოვარიაციის მატრიცების განსაზღვრა და მათზე არითმეტიკული ოპერაციები საკმაოდ ხარჯიანია. ამის არიდება შესაძლებელია ე.წ პრეკონდიციის გამოყენებით ((16), (15)). წარმოვადგინოთ კოვარიაციის მატრიცები მათივე კვადრატული ფესვების ნამრავლის სახით $B = B^{1/2} B^{T/2}$ და $K = K^{1/2} K^{T/2}$. შემოვიტანოთ ახალი ცვლადები v და w

$$v := B^{-1/2} \delta x, \quad w := K^{-1/2} \delta u. \quad (41)$$

გადავწეროთ (39) ფუნქციონალი ამ ცვლადებში

$$J(v, w) = \frac{1}{2} v^T v + J_o + \frac{1}{2} w^T w. \quad (42)$$

შესაბამისად, გადაიწერება გრადიენტიც

$$\nabla J(v, w) = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B^{1/2} & 0 \\ 0 & K^{1/2} \end{pmatrix} \times \sum_{t_i=t_0}^{t_N} H^T M_i^* R^{-1} (d(t_i) - H M_i \delta x(t_i)). \quad (43)$$

ვინაიდან, მინიმიზაციის დასაწყისში საწყისი მონაცემი x აიღება წინასწარ მოცემული x_b ინფორმაციის ტოლი, ამიტომ $\delta x = 0$, $v = 0$ და $w = 0$. მინიმიზაციის ყოველი ბიჯის დასრულების შემდეგ ახალი ოპტიმიზირებული საწყისი მონაცემი და ემისიის ფაქტორი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით

$$x(t_0) = B^{1/2}v(t_0) + x_b(t_0), \quad e(t_0) = K^{1/2}w(t_0) + e_b(t_0) \quad (44)$$

5.3 4-განზომილებიანი ვარიაციული მონაცემთა ასიმილაცია ადვექციის განტოლებისთვის

განვიხილოთ ფუნქციონალი:

$$J(\vec{q}_0) = \frac{1}{2}(\vec{q}^b - \vec{q}_0)^T B^{-1}(\vec{q}^b - \vec{q}_0) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{NT}} (\vec{q}^o(t) - H[\vec{q}(t)])^T R^{-1}(\vec{q}^o(t) - H[\vec{q}(t)]) dt, \quad (45)$$

სადაც q_0 არის წრფივი ადვექციის განტოლების საწყისი მონაცემი, q_b ასევე არის წინასწარ მოცემული ინფორმაცია, რომელიც ფუნქციონალის მინიმიზაციისას იტერაციულ მეთოდებში გამოიყენება როგორც საწყისი მიახლოება. ფუნქციონალში პირველი წევრი აღწერს სხვაობას q_0 საწყის მონაცემსა და საწყის q_b ინფორმაციას შორის, ხოლო მეორე წევრი აღწერს შეუსაბამობას დაკვირვების q^o ინფორმაციასა და $q(t)$ მოდელს შორის.

ვარიაციული მონაცემთა ასიმილაციის პრობლემა წრფივი ადვექციის განტოლებისთვის დაისმის ასე:

იპოვეთ ისეთი q_0 ვექტორი, რომელიც მინიმიზაციას უკეთებს 45 ფუნქცი-

ონალს და აკმაყოფილებს წრფივი ადვექციის განტოლებას საწყისი პირობით:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho q) + \nabla_h(\rho q v_h) = 0, \quad q(0) = q_0. \quad (46)$$

. ფუნქციონალის მინიმიზაციისთვის საჭირო გრადიენტი გამოითვლება შემდეგი სახით:

$$\nabla_{q_0} J(q_0) = \nabla_{q_0} J^b(q_0, q^b) - \rho(0, \lambda, \theta) q^*(0, \lambda, \theta), \quad (47)$$

სადაც $q^*(0)$ არის შეუღლებული განტოლების ამონახსნი დროის 0 მომენტში

$$\rho \left(\frac{\partial q^*}{\partial t} + v \cdot \nabla q^* \right) = \nabla_q J^o(q, q^o, t, \lambda, \theta), \quad (48)$$

და საწყისი პირობით დროის $t = T$ მომენტში

$$q^*(T, \lambda, \theta) = 0. \quad (49)$$

5.4 ჰორიზონტალური ადვექციის სქემის სტანდარტული შეუღლებული სქემა

ICON მოდელში გამოყენებული რიცხვითი სქემა მოხერხებულობისთვის შეიძლება გადავწეროთ ნაკადის სახით

$$\frac{\rho_j^{n+1} q_j^{n+1} - \rho_j^n q_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in I_j} F_{ji}(\{\bar{\rho}_k^n, \bar{v}_k^n, q_k^n\}_{k \in K_{ji}}, \vec{n}_{ji}, l_{ji}) = 0, \quad (50)$$

სადაც I_j არის რაიმე A_j სამკუთხედის მეზობლების ინდექსების სიმრავლე, ხოლო F_{ji} არის A_j და A_i სამკუთხედებს შორის მდებარე წიბოზე შემომავალი ნაკადი. K_{ji} აღნიშნავს იმ სამკუთხედების ინდექსების სიმრავლეს, რომელ სამკუთხედებშიც ρ -ს და q -ს მნიშვნელობა გამოიყენება F_{ji} ნაკადის გამოსათვლელად. \vec{n}_{ji} არის A_j და A_i სამკუთხედებს შორის მდებარე წიბოზე მოდებული ერთეულოვანი გარე ნორმალის ვექტორი, ხოლო l_{ji} ამ წიბოს

სიგრძე. $\bar{\rho}_k^n$ და \bar{v}_k^n არის $[t_n, t_{n+1}]$ დროის ინტერვალზე გასაშუალოებული ρ_k და v_k -ის მნიშვნელობები.

სტანდარტული მეთოდით შეუღლებული სქემის ასაგებად პირველ რიგში (50) ხელახლა გადავწეროთ

$$\frac{\rho_j^{n+1} q_j^{n+1} - \rho_j^n q_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in S_j} \alpha_{ji} (\{\bar{\rho}_k^n, \bar{v}_k^n\}_{k \in K_{ji}}) q_i^n = 0, \quad S_j = \cup_{i \in I_j} K_{ji}, \quad (51)$$

სადაც S_j არის სქემის შაბლონზე მოცემული სამკუთხედების ინდექსები (<http://www.cgd.ucar.edu/cms/pel/transport-workshop/2011/16-Reinert.pdf>).

(51) სქემა არის წრფივი q^n ვექტორის მიმართ და შესაბამისად ეს არის ამოსავალი წერტილი შეუღლებული სქემის ასაგებად. შესაბამისი ალგორითმის გამოყენებით, გვექნება

$$\begin{aligned} \sum_j |\Omega_j| q_j^{*,n} \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in S_j} \alpha_{ji} (\{\bar{\rho}_k^n, \bar{v}_k^n\}_{k \in K_{ji}}) q_i^n &= \sum_j \sum_i \alpha_{ji} (\{\bar{\rho}_k^n, \bar{v}_k^n\}_{k \in K_{ji}}) q_i^n q_j^{*,n} = \\ \sum_i \sum_j \alpha_{ji} (\{\bar{\rho}_k^n, \bar{v}_k^n\}_{k \in K_{ji}}) q_i^n q_j^{*,n} &= \sum_i |\Omega_i| q_i^n \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{j \in S_i^*} \alpha_{ji} (\{\bar{\rho}_k^n, \bar{v}_k^n\}_{k \in K_{ji}}) q_i^{*,n}, \end{aligned} \quad (52)$$

სადაც S_i^* არის სამკუთხედების ინდექსების სიმრავლე, რომლისთვისაც $\alpha_{ji} \neq 0$. (52)-ის, (51)-ის და (48)-ის გათვალისწინებით, შეუღლებული სქემა იქნება:

$$\bar{\rho}_j^n \frac{q_j^{*,n+1} - q_j^{*,n}}{\Delta t} - \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in S_j^*} \alpha_{ij} (\{\bar{\rho}_k^n, \bar{v}_k^n\}_{k \in K_{ij}}) q_i^{*,n} = \nabla_q f^o(q_j^{*,n}, q_j^{o,n}, t_n, \xi_j). \quad (53)$$

(53) სქემა არის შეუღლებული სქემა სტანდარტული მეთოდით. მოცემულია შეუღლებული სქემის კოეფიციენტები, ხოლო (3) მოცემულია შეუღლებული სქემის შაბლონი.

$$\begin{aligned}
\alpha_{j0} &= \sum_{e=1}^3 \gamma_e \beta_{j0}^e, & \alpha_{j1} &= \sum_{e=1}^3 \gamma_e \beta_{j1}^e, & \alpha_{j2} &= \sum_{e=1}^3 \gamma_e \beta_{j2}^e, & \alpha_{j3} &= \sum_{e=1}^3 \gamma_e \beta_{j3}^e, \\
\alpha_{j4} &= \gamma_1 \beta_{j4}^1 + \frac{1}{2}(1 + s_2) \gamma_2 \beta_{j4}^2 + \frac{1}{2}(1 + s_3) \gamma_3 \beta_{j4}^3, \\
\alpha_{j5} &= \gamma_1 \beta_{j5}^1 + \frac{1}{2}(1 + s_2) \gamma_2 \beta_{j5}^2 + \frac{1}{2}(1 + s_3) \gamma_3 \beta_{j5}^3, \\
\alpha_{j6} &= \gamma_2 \beta_{j6}^2 + \frac{1}{2}(1 + s_1) \gamma_1 \beta_{j6}^1 + \frac{1}{2}(1 + s_3) \gamma_3 \beta_{j6}^3, \\
\alpha_{j7} &= \gamma_2 \beta_{j7}^2 + \frac{1}{2}(1 + s_1) \gamma_1 \beta_{j7}^1 + \frac{1}{2}(1 + s_3) \gamma_3 \beta_{j7}^3, \\
\alpha_{j8} &= \gamma_3 \beta_{j8}^3 + \frac{1}{2}(1 + s_1) \gamma_1 \beta_{j8}^1 + \frac{1}{2}(1 + s_2) \gamma_2 \beta_{j8}^3, \\
\alpha_{j9} &= \gamma_3 \beta_{j9}^3 + \frac{1}{2}(1 + s_1) \gamma_1 \beta_{j9}^1 + \frac{1}{2}(1 + s_2) \gamma_2 \beta_{j9}^3, \\
\alpha_{j10} &= \frac{1}{2}(1 - s_1) \gamma_1 \beta_{j10}^1, & \alpha_{j11} &= \frac{1}{2}(1 - s_1) \gamma_1 \beta_{j11}^1, \\
\alpha_{j12} &= \frac{1}{2}(1 - s_1) \gamma_1 \beta_{j12}^1 + \frac{1}{2}(1 - s_2) \gamma_2 \beta_{j12}^2 \\
\alpha_{j13} &= \frac{1}{2}(1 - s_2) \gamma_2 \beta_{j13}^2, & \alpha_{j14} &= \frac{1}{2}(1 - s_2) \gamma_2 \beta_{j14}^2 \\
\alpha_{j15} &= \frac{1}{2}(1 - s_2) \gamma_2 \beta_{j15}^2 + \frac{1}{2}(1 - s_3) \gamma_3 \beta_{j15}^3 \\
\alpha_{j16} &= \frac{1}{2}(1 - s_3) \gamma_3 \beta_{j16}^3, & \alpha_{j17} &= \frac{1}{2}(1 - s_3) \gamma_3 \beta_{j17}^3, \\
\alpha_{j18} &= \frac{1}{2}(1 - s_1) \gamma_1 \beta_{j18}^1 + \frac{1}{2}(1 - s_3) \gamma_3 \beta_{j18}^3
\end{aligned} \tag{54}$$

სადაც $\gamma_e = s_e d_e l_e \bar{v}_e$. s_e მიუთითებს წინოს ორიენტაციას ბადეზე და განისაზღვრება წიბოზე მოდებული ნორმალის მიმართულების მიხედვით, d_e არის წიბოს შრის სისქე, $d_e = \frac{\tilde{l}_{e,2}}{\tilde{l}_e} d_{c,1} + (1 - \frac{\tilde{l}_{e,2}}{\tilde{l}_e}) d_{c,2}$, სადაც $d_{c,i}$, $i = 1, 2$ არის შრის სისქე წიბოსთან მდებარე ორივე სამკუთხედის ცენტრებში, \tilde{l}_e არის მანძილი ამ სამკუთხედის ცენტრებს შორის და $\tilde{l}_{e,2}$ არის მანძილი წიბოს შუა წერტილსა და სამკუთხედის ცენტრს შორის. სამკუთხედის ცენტრებს შორის შრის სისქე გამოითვლება წნევის კოორდინატებში ((17)). $|\bar{\Omega}_e|$ არის e^{th} წიბოსთან მდებარე გადატანილი რეგიონის ფართობი, $e = 1, 2, 3$.

$$K_{j1} = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & \text{if } \bar{v}_1 > 0, \\ \{1, 5, 0, 4, 11, 12, 2, 3, 18, 10\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K_{j2} = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & \text{if } \bar{v}_2 > 0, \\ \{2, 6, 7, 0, 12, 13, 14, 15, 3, 1\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$K_{j3} = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, & \text{if } \bar{v}_3 > 0, \\ \{3, 0, 8, 9, 1, 2, 15, 16, 17, 18\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

\vec{p}_e არი q ტრასერისგან დამოუკიდებელი გაუსის კვადრატურის ვექტორი:

$$p_{e,1} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}|, \quad p_{e,2} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}| \lambda_{e,k}, \quad p_{e,3} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}| \theta_{e,k},$$

$$p_{e,4} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}| \lambda_{e,k}^2, \quad p_{e,5} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}| \theta_{e,k}^2, \quad p_{e,6} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}| \lambda_{e,k} \theta_{e,k},$$

$$p_{e,7} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}| \lambda_{e,k}^3, \quad p_{e,8} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}| \theta_{e,k}^3, \quad p_{e,9} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}| \lambda_{e,k}^2 \theta_{e,k},$$

$$p_{e,10} = \sum_{k=1}^4 \omega_{e,k} |J_{e,k}| \lambda_{e,k} \theta_{e,k}^2.$$

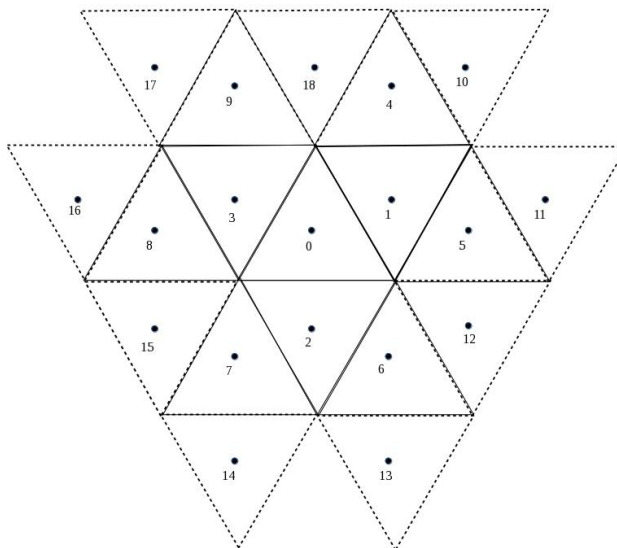
$(\lambda_{e,i}, \theta_{e,i})$ არის გაუსის კვადრატურის წერტილები, $w_{e,i}$ არის წონები $J_{e,i}$ არის გარდაქმნის იაკობიანი, $i = \overline{1, 4}$.

\vec{c}_e არის q ტრასერზე დამოკიდებული 10 უცნობი კოეფიციენტის ვექტორი:

$$c_{e,1} = q_{j,e}, \quad c_{e,2} = \frac{\partial q_{j,e}}{\partial \lambda}, \quad c_{e,3} = \frac{\partial q_{j,e}}{\partial \theta}, \quad c_{e,4} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_{j,e}}{\partial \lambda^2}, \quad c_{e,5} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_{j,e}}{\partial \theta^2},$$

...

ეს უცნობი კოეფიციენტები არის უმცირეს კვადრატთა მეთოდით სისტემის ამონახსნი ((18)).



სურ 3: ICON FFSL და შესაბამისი შეუღლებული სქემის შაბლონი. სამკუთხედები მხოლოდ უწყვეტი ხაზებით არის ICON FFSL სქემის შაბლონი, ხოლო წყვეტილ-ხაზებიანი სამკუთხედებთან ერთად არის შეუღლებული სქემის შაბლონი.

5.5 ჰორიზონტალური ადვექციის სქემის ხელოვნური წყაროს წევრით შეუღლებული სქემა

ამ თავში მოცემულია ახალი მეთოდი ჰორიზონტალური ადვექციისთვის შეუღლებული რიცხვითი სქემის ასაგებად. მეთოდის გამოყენებით შესაძლებელია შეუღლებული სქემის აგება როგორც ნაკადის ლიმიტერებიანი სქემებისთვის, ასევე ნაკადის ლიმიტერის გარეშე რიცხვითი სქემებისთვის. ამ მეთოდის გამოყენებით ავაგებთ შეუღლებულ რიცხვით სქემას ICON-FFSL-ისთვის. ამისათვის შეუღლებული განტოლება გადავწეროთ შემდეგი სახით

$$\rho \frac{\partial q^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho q^* \vec{v}) = q^* \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \nabla_q J^o(q, q^o, t, \xi), \quad (55)$$

ამ ფორმით განტოლების გადაწერა მოხერხებულია, რადგან საშუალებას გვაძლევს გამოვეყნოთ უკვე ჰორიზონტალური ადვექციის სქემა არსებული. უფრო ზუსტად, შესაძლებელია ICON-FFSL სქემის გამოყენება განტო-

ლების მარცხენა და მარჯვენა წევრებისთვის. მიიღება შემდეგი რიცხვითი სქემა:

$$\bar{\rho}_j^n \frac{q_j^{*,n+1} - q_j^{*,n}}{\Delta t} + \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in I_j} F_{ji}(\{\bar{\rho}_j^n, \bar{v}_k^n, q_k^{*,n}\}_{k \in K_{ji}}, \vec{n}_{ji}, l_{ji}) = \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in I_j} F_{ji}(\{\bar{\rho}_j^n, \bar{v}_k^n, q_k^{*,n}\}_{k \in K_{ji}}, \vec{n}_{ji}, l_{ji}) + \nabla_q J^o(q_j^n, q_j^{o,n}, t_n, \xi_j). \quad (56)$$

სადაც პირველ ჯამი ტოლობის მარცხენა მხარეს შეესაბამება ზუსტად ICON-FFSL სქემის დისკრეტიზაციას, ხოლო მეორე ჯამი მარჯვენა მხარეს არის ისევ ICON-FFSL სქემა, მხოლოდ იმ განსხვავებით, რომ გამოყენებულია $q_j^{*,n}$ ნაცვლად $q_k^{*,n}$ -სა. ამ მეთოდის უპირატესობა არის ის, რომ საგრძნობლად მცირდება დრო შეუღლებული სქემის ასაგებად, რადგან შეგვიძლია გამოვიყენოთ უკვე არსებული პირდაპირი ადვექციის სქემა. ასევე შესაძლებელია ნაკადის ლიმიტერების ჩართვა შეუღლებულ სქემაში.

5.6 შეუღლებული სქემის თვისებები

სავარაუდოა, რომ ხელოვნური წყაროს წევრის მეთოდით აგებულ შეუღლებულ სქემას ექნება ისეთივე რიცხვითი თვისებები, როგორც მის მშობელ პირდაპირ ადვექციის სქემა. მინიმალური თვისებები, რომლებიც უზრუნველყოფს სქემის კრებადობას არის სქემის თავსებადობა და მდგრადობა. ამიტომ ჩავთვალოთ, რომ მშობელ ფუნქციას აქვს მოცემული რიცხვითი თვისებები და ამის შემდეგ დავამტკიცოთ, რომ შესაბამის შეუღლებულ სქემასაც აქვს იგივე თვისებები.

თეორემა 5.1 (თავსებადობა). *დავუშვათ q, ρ, \vec{v}, q^* არიან საკმარისად გლუვი ფუნქციები და (50) რიცხვითი სქემა თავსებადია (10) წრფივ ადვექციის განტოლებასთან. მაშინ ხელოვნური წყაროს წევრის დამატებით აგებული შეუღლებული რიცხვითი სქემაც (56) ასევე თავსებადია (55) შეუღლებულ განტოლებასთან.*

დამტკიცება. (50) რიცხვითი სქემის (10) განტოლებასთან თავსებადობის პირობის მოთხოვნების გათვალისწინებით, ადვილი დასაბუთებაა თავსებადობა სქემის და განტოლების შესაბამის წევრებს შორის. უფრო ზუსტად ცხადია, რომ

$$\frac{\rho_j^{n+1} q_j^{n+1} - \rho_j^n q_j^n}{\Delta t} \text{ თავსებადია } \frac{\partial(\rho q)}{\partial t} - \text{სთან} \quad (57)$$

(t_n, ξ_j) -ში და შესაბამისად

$$\frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in I_j} F_{ji}(\{\bar{\rho}_k^n, \bar{v}_k^n, q_k^n\}_{k \in K_{ji}}, \vec{n}_{ji}, l_{ji}) \text{ და } \nabla \cdot (\rho q \vec{v}) \text{ თავსებადია} \quad (58)$$

(t_n, ξ_j) -ში. დავუშვათ, რომ ზემოთ მოცემულ გამოსახულებაში $q_k = q_j$ ნიშნავს, რომ q მუდმივია შაბლონზე და ამიტომ

$$\frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in I_j} F_{ji}(\{\bar{\rho}_k^n, \bar{v}_k^n, q_j^n\}_{k \in K_{ji}}, \vec{n}_{ji}, l_{ji}) \text{ თავსებადია } q_j \nabla \cdot (\rho \vec{v}) - \text{სთან} . \quad (59)$$

(57)-ის მსგავსად ცხადია რომ პირველი და მეოთხე წევრი ხელოვნური წყაროს წევრის დამატებით მიღებულ რიცხვით სქემაში (56) თავსებადია (t_n, ξ_j) -ში (55) შეუღლებული განტოლების პირველ და მეოთხე წევრთან. (58)-სა და (59)-ში ჩავსვათ q_j^{*n} q_j^n -ში და მივიღებთ (56) რიცხვითი სქემის მეორე და მესამე წევრის და (55) განტოლების მეორე და მესამე წევრის თავსებადობას (t_n, ξ_j) -ში. ამით დამტკიცება დასრულებულია. \square

თეორემა 5.2 (მდგრადობა). დავუშვათ

1. ρ არ არის დროზე დამოკიდებული.
2. $\rho \geq \rho_{min} > 0$.
3. $\rho, \vec{v}, F, q, \tilde{q}$ არიან საკმარისად გლუვები.
4. $\vec{q}^n, \vec{\tilde{q}}^n$ არის (50) რიცხვითი სქემით მიღებული რიცხვითი ამონახსნები, შესაბამისად $\vec{q}_0, \vec{\tilde{q}}_0$ საწყისი პირობის გათვალისწინებით.

5. კურანტ-ფრიდრიხს ლევის (CFL) პირობის გათვალისწინებით და CFL_0 CFL რიცხვით, რიცხვითი სქემა (50) მდგრადია ზოგიერთი ნორმის შემთხვევაში:

$$\|\vec{q}^{n+1} - \vec{q}^{*n+1}\| \leq (1 + C_0\Delta t)\|\vec{q}^n - \vec{q}^{*n}\|, \quad 0 \leq n < N_t, \quad (60)$$

C_0 მუდმივა არ არის დამოკიდებული n -ზე.

თუ 1. – 5. პუნქტები სრულდება, მაშინ (56) რიცხვითი სქემა ხელოვნური წყაროს წევრით არის ასევე მდგრადი სქემა იგივე ცდომილების ნორმების-თვის CFL პირობით სადაც $CFL_* = 2CFL_0$,

$$\|\vec{q}^{*,n} - \vec{q}^{*n}\| \leq C_1\|\vec{q}_0^* - \vec{q}_0^{*n}\|, \quad 0 < n \leq N_t, \quad (61)$$

სადაც C_1 არის n -სგან დამოუკიდებელი რაიმე მუდმივა.

დამტკიცება. (56) რიცხვითი სქემა შეიძლება გადაიწეროს ექვივალენტური ფორმით:

$$\frac{1}{2}\bar{\rho}_j^n \frac{q_j^{*,1,n+1} - q_j^{*,n}}{\Delta t} + \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in I_j} F_{ji}(\{\bar{\rho}_j^n, \bar{v}_k^n, q_k^{*,n}\}_{k \in K_{ji}}, \vec{n}_{ji}, l_{ji}) = 0, \quad (62a)$$

$$\frac{1}{2}\bar{\rho}_j^n \frac{q_j^{*,2,n+1} - q_j^{*,n}}{\Delta t} = \frac{1}{|\Omega_j|} \sum_{i \in I_j} F_{ji}(\{\bar{\rho}_j^n, \bar{v}_k^n, q_k^{*,n}\}_{k \in K_{ji}}, \vec{n}_{ji}, l_{ji}) + \nabla_q f^o(q_j^n, q_j^{o,n}, t_n, \xi_j), \quad (62b)$$

$$q_j^{*,n+1} = \frac{1}{2}(q_j^{*,1,n+1} + q_j^{*,2,n+1}). \quad (62c)$$

რიცხვითი სქემა (62a)-დან შეიძლება მიღებული იქნას (56)-დან $\bar{\rho}_j^{n+1}$ -ის $\bar{\rho}_j^n$ -ით ჩანაცვლებით, (თეორემის 1 მოთხოვნა) და ასევე Δt -ს $2\Delta t$ -თი ჩანაცვლებით. შესაბამისად, (60)-ის მსგავსად, შეფასება მართებულია $q^{*,1,n+1}$ -სთვის CFL პირობით CFL_* და გვაქვს:

$$\|\vec{q}^{*,1,n+1} - \vec{q}^{*n+1}\| \leq (1 + 2C_0\Delta t)\|\vec{q}^{*,n} - \vec{q}^{*n}\|, \quad 0 \leq n < N_t. \quad (63)$$

(62b) განტოლების მარჯვენა მხარეში პირველი წევრი თავსებადია $q_j \nabla \cdot (\rho \vec{v})$ -სთან 5.1 თეორემის თანახმად. ამიტომ, 5.2 თეორემაში სიგლუვის მოთხოვნის გათვალისწინებით შეგვძლია ვთქვათ, რომ არსებობს ისეთი C_2 მუდმივა, n -სგან დამოუკიდებელი, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$\frac{2}{\bar{\rho}_j^n |\Omega_j|} \left| \sum_{i \in I_j} [F_{ji}(\{\bar{\rho}_j^n, \bar{v}_k^n, q_j^{*,n}\}_{k \in K_{ji}}, \vec{n}_{ji}, l_{ji}) - F_{ji}(\{\bar{\rho}_j^n, \bar{v}_k^n, \tilde{q}_j^{*,n}\}_{k \in K_{ji}}, \vec{n}_{ji}, l_{ji})] \right| \leq 2C_2 |q_j^*|$$

(62) განტოლების მარჯვენა მხარეს მეორე წევრი არ არის დამოკიდებული q^* -ზე. ამიტომ, (64)-ის გამო, ეილერის ცხადი დროში ინტეგრაციის სქემის ანალოგიურად, მივიღებთ მდგრადობის უტოლობას:

$$\|\vec{q}^{*,2,n+1} - \vec{q}^{*,2,n}\| \leq (1 + 2C_2 \Delta t) \|\vec{q}^{*,n} - \vec{q}^{*,n}\|, \quad 0 \leq n < N_t. \quad (65)$$

(62c)-ში (61)-ის და (65) -ის ერთად განხილვით მივიღებთ მდგრადობას q^* -სთვის დროის ერთი ბიჯისთვის:

$$\|\vec{q}^{*,n+1} - \vec{q}^{*,n}\| \leq (1 + [C_0 + C_2] \Delta t) \|\vec{q}^{*,n} - \vec{q}^{*,n}\|, \quad 0 \leq n < N_t. \quad (66)$$

(66)-დან ვიღებთ (61)-ს $C_1 = \exp((C_0 + C_2)T)$ -ით, რითიც მტკიცდება თეორემა. □

შენიშვნა 5.1. $CFL_* = 2CFL_0$ საჭიროა მხოლოდ თეორიული შეფასებებისთვის. პრაქტიკაში, რიცხვითი ექსპერიმენტების გამოთვლისას წყაროს წევრიანი შეუღლებული სქემა მდგრადია იგივე CFL პირობისთვის, როგორც მისი მშობელი სქემა.

შენიშვნა 5.2. 5.2 თეორემა განხილულია დროზე დამოუკიდებელი ρ -სთვის. თუ ρ დროზე დამოკიდებულია, იგივეს დამტკიცება შესაძლებელია ხელოვნური წყაროს წევრიანი რიცხვითი სქემის სხვაგვარი ექვივალენტური ფორმულირების გამოყენებით. უფრო ზუსტად

$$\bar{\rho}_j^n \frac{q_j^{*,n+1} - q_j^{*,n}}{\Delta t} = RHS^n \quad (67)$$

შეიძლება გადაიწეროს როგორც ორ ეტაპიანი სქემა:

$$\frac{\bar{\rho}_j^{n+1} q_j^{*,1,n+1} - \bar{\rho}_j^n q_j^{*,n}}{\Delta t} = RHS^n, \quad (68)$$

$$\frac{q_j^{*,2,n+1} - q_j^{*,1,n+1}}{\Delta t} = \frac{1}{\bar{\rho}_j^n} \frac{\bar{\rho}_j^{n+1} - \bar{\rho}_j^n}{\Delta t} q_j^{*,2,n+1}. \quad (69)$$

დავუშვათ რომ 5.2 თეორემაში მოთხოვნილი პირობები სრულდება. მაშინ (67) სქემის მდგრადობის მისაღებად შესაძლებელია theorem 5.2 თეორემის გამოყენება. (69) რიცხვითი სქემა შეიძლება ფორმულირებული იქნას როგორც ეილერის არაცხადი სქემა $q_j^{*,2,n+1}$ -ის მიმართ და ცხადი სქემა $q_j^{*,1,n+1}$ -ის მიმართ. მაშინ 5.2 თეორემაში მე-2 და მე-3 პირობის გამო $q_j^{*,1,n+1}$ -ისთვის მდგრადობის მიღება ტრივიალურია. (67)-ის და (68)-ის ექვივალენტურობით, (69)-ით სრულდება მდგრადობის შეფასება იმ შემთხვევისთვის, როდესაც გვაქვს რიცხვითი სქემა სადაც ρ დროზე არის დამოკიდებული.

6 წრფივი ადვექციის ექსპერიმენტები

რიცხვით ექსპერიმენტებში გამოყენებულია სხვადასხვანაირი წრფივი ადვექციის ამოცანები. გათვლები გაკეთებული ICON მოდელის R02B04 ბადეზე, რომელიც იძლევა სფეროს სრულ დაფარვას 20480 სათვლელი სამკუთხედით, სადაც სათვლელ წერტილებს შორის მანძილი სფეროზე მიახლოებით 160 კილომეტრია. წრფივი ადვექციის ტესტები საშუალებას იძლევა შევადაროთ ორი სხვადასხვა მეთოდით აგებული შეუღლებული ადვექციის სქემები: სტანდარტული მეთოდით და ახალი წყაროს წევრის დამატებით. ასევე შესაძარებლად გამოვიყენებთ პირდაპირი ICON-FFSL სქემის შედეგებსაც. წრფივი ადვექციის ექსპერიმენტებში გამოყენებული იქნა ორი ტიპის ნაკადის ლიმიტერი ((3), (4)) და ((3), (5)). წრფივი ადვექციის ტესტებში ცნობილია ზუსტი ამონახსნები. შესაბამისად, რიცხვით

შედეგებს ვადარებთ ზუსტ ამონახსნს და ცდომილებას ვზომავთ სამხაირი ფარდობითი და აბსულუტური ნორმებით:

$$l_{1,rel} = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} |\Omega_i| |q_i - q_i^{true}|}{\sum_{i=1}^{N_c} |\Omega_i| |q_i^{true}|}, \quad l_{1,abs} = \sum_{i=1}^{N_c} |q_i - q_i^{true}|, \quad l_{2,rel} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_c} |\Omega_i| (q_i - q_i^{true})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_c} |\Omega_i| (q_i^{true})^2}}$$

$$l_{2,abs} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_c} (q_i - q_i^{true})^2}, \quad l_{\infty,rel} = \frac{\max_{i=1, \dots, N_c} |q_i - q_i^{true}|}{\max_{i=1, \dots, N_c} |q_i^{true}|}, \quad l_{\infty,abs} = \max_{i=1, \dots, N_c} |q_i - q_i^{true}|$$

6.1 წრფივი ადვექციის ტესტური ამოცანები

წრფივი ადვექციის ტესტები მოცემულია სხვადასხვა ლიტერატურაში ((19), (20), (21), (22), (3)). განხილულია 4 ტიპის ამოცანა: ცხრილი (2)-ში მოცემული ყველა გამოყენებული ტესტური ამოცანების საწყისი მონაცემები და მათში შემავალი პარამეტრები. ხოლო (1) ცხრილში მოცემულია სხვადასხვა სიჩქარის ვექტორები და ზუსტი ამონახსნები.

ცხრილი 1: სიჩქარის ვექტორები

No	სიჩქარის ვექტორი	პარამეტრები	ლიტ.
1	მყარი სხეულის როტაცია: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ზუსტი ამონახსნი: ერთი სრული ბრუნის შემდეგ, საწყისი მონაცემი უბრუნდება საწყის ადგილს		
	$v_\lambda(\lambda, \theta) = u_0(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cos \lambda \sin \alpha),$ $v_\theta(\lambda, \theta) = -u_0 \sin \lambda \sin \alpha$	$u_0 = 2\pi R/T \quad \alpha = 0^\circ \quad 0 \leq t \leq T$ $R = 6.371229 \times 10^6 [m] \quad T = 1036800 [s]$	(22)
2	დეფორმაციული ნაკადი: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ზუსტი ამონახსნი: სრული დეფორმაციის შემდეგ, საწყისი მონაცემი უბრუნდება საწყის ადგილს		
	$v_\lambda(\lambda, \theta, t) = k \sin^2(\lambda/2) \sin(2\theta) \cos(\pi t/T),$ $v_\theta(\lambda, \theta, t) = \frac{k}{2} \sin \lambda \cos \theta \cos(\pi t/T)$	$k = 2.4 \quad 0 \leq t \leq T$	(20)
3	დეფორმაციული ნაკადი: $\nabla \cdot \vec{v} \neq 0$ ზუსტი ამონახსნი: სრული დეფორმაციის შემდეგ, საწყისი მონაცემი უბრუნდება საწყის ადგილს		
	$v_\lambda(\lambda, \theta, t) = -k \sin^2(\lambda/2) \sin(2\theta) \cos^2 \theta \cos(\pi t/T),$ $v_\theta(\lambda, \theta, t) = \frac{k}{2} \sin \lambda \cos^3 \theta \cos(\pi t/T)$	$k = 1 \quad 0 \leq t \leq T$	(20)
4	მოძრავი ვორტექსები: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ზუსტი ამონახსნი: პირდაპირი- $q(t, \lambda, \theta) = 1 - \tanh[\frac{\tilde{\rho}}{\gamma} \sin(\lambda' - \omega t)]$, შეუღლებული- $q(t, \lambda, \theta) = 1 - \tanh[\frac{\tilde{\rho}}{\gamma} \sin(\lambda' + \omega t)]$		
	$v_\lambda(t, \lambda, \theta) = u_0(\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cos \lambda \sin \alpha) +$ $R\omega(\theta')(\sin \theta_c \cos \theta - \cos \theta_c \cos(\lambda - \lambda_c) \sin \theta),$ $v_\theta(t, \lambda, \theta) = -u_0 \sin \lambda \sin \alpha + R\omega(\theta')(\cos \theta_c \sin(\lambda - \lambda_c)).$	$V = v_0 \frac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2(\tilde{\rho}) \tanh(\tilde{\rho}) \quad v_0 = 2\pi R/T$ $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 \cos \theta' \quad \tilde{\rho}_0 = 3 \quad R = 6.371229 \times 10^6 [m]$ $\omega(\theta') = \begin{cases} V/(R\tilde{\rho}), & \text{if } \tilde{\rho} \neq 0, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში.} \end{cases}$ $(\lambda_c, \theta_c) = (\lambda_p + \omega t_n, \theta_p) \quad T = 1036800 [s]$ $(\lambda_p, \theta_p) = (\pi - 0.8 + \pi/4, \pi/4.8)$ $t_n = n\Delta t \quad \Delta t = 600 [s] \quad 0 \leq t \leq T$	(19)

ცხრილი 2: საწყისი მონაცემები

No	საწყისი მონაცემი	პარამეტრები	ლიტ.
1	კოსინუსის ზარი $q(\lambda, \theta, t_0) = \begin{cases} \frac{h_{max}}{2} (1 + \cos \frac{\pi r}{\tilde{r}}), & \text{if } r < \tilde{r} \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$	$r = \arccos(\sin \theta_c \sin \theta + \cos \theta_c \cos \theta \cos(\lambda - \lambda_c))$ $h_{max} = 1 \quad \tilde{r} = 1/3 \quad (\lambda_c, \theta_c) = (3\pi/2, 0)$	(22)
2	გაჭრილი ცილინდრი $q(t_0, \lambda, \theta) = \begin{cases} c, & \text{if } r \leq \tilde{r}, \lambda - \lambda_c \geq \frac{\tilde{r}}{6}, \\ c, & \text{if } r \leq \tilde{r}, \lambda - \lambda_c < \frac{\tilde{r}}{6}, \theta - \theta_c < \frac{2}{3}\tilde{r}, \\ b, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$	$r = \arccos(\sin \theta_c \sin \theta + \cos \theta_c \cos \theta \cos(\lambda - \lambda_c))$ $\tilde{r} = 1/2$ $c = 1 \quad b = 0 \quad (\lambda_c, \theta_c) = (3\pi/2, 0)$	(3)
3	ვორტექსი $q(t_0, \lambda', \theta') = 1 - \tanh[\frac{\tilde{r}}{\gamma} \sin(\lambda' - \omega(\theta')t)]$	$\lambda'(\lambda, \theta) = \arctan[\frac{\cos \theta \sin(\lambda - \lambda_p)}{\cos \theta \sin \theta_p \cos(\lambda - \lambda_p) - \cos \theta_p \sin \theta}],$ $\theta'(\lambda, \theta) = \arcsin[\sin \theta \sin \theta_p + \cos \theta \cos \theta_p \cos(\lambda - \lambda_p)],$ $\omega(\theta') = \begin{cases} V/(R\tilde{\rho}), & \text{if } \tilde{\rho} \neq 0, \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში.} \end{cases}$ $V = v_0 \frac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{sech}^2(\tilde{\rho}) \tanh(\tilde{\rho})$ $v_0 = 2\pi R/T \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0 \cos \theta'$ $R = 6.371229 \times 10^6 [m] \quad T = 1036800 [s]$ $(\lambda_p, \theta_p) = (\pi - 0.8 + \pi/4, \pi/4.8)$ $\gamma = 5 \quad \tilde{\rho}_0 = 3$	(21)
4	ორი კოსინუსის ზარი $q(t_0, \lambda, \theta) = \begin{cases} b + ch_1(\lambda, \theta), & \text{if } r_1 < \tilde{r}, \\ b + ch_2(\lambda, \theta), & \text{if } r_2 < \tilde{r}, \\ b, & \text{სხვა შემთხვევაში,} \end{cases}$	$h_i(\lambda, \theta) = \begin{cases} \frac{h_{max}}{2} (1 + \cos \frac{\pi r}{\tilde{r}}), & \text{if } r_i < \tilde{r} \\ 0, & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$ $r_i = \arccos(\sin \theta_{c,i} \sin \theta + \cos \theta_{c,i} \cos \theta \cos(\lambda - \lambda_{c,i}))$ $i = 1, 2 \quad h_{max} = 1 \quad \tilde{r} = 1/2 \quad c = 1 \quad b = 0$ $(\lambda_{c,1}, \theta_{c,1}) = (3\pi/4, 0) \quad (\lambda_{c,2}, \theta_{c,2}) = (5\pi/4, 0)$	(22)
5	ორი ჩაჭრილი ცილინდრი $q(t_0, \lambda, \theta) = \begin{cases} c, & \text{if } r_i \leq \tilde{r}, \lambda - \lambda_{c,i} \geq \frac{\tilde{r}}{6} \text{ for } i = 1, 2, \\ c, & \text{if } r_1 \leq \tilde{r}, \lambda - \lambda_{c,1} < \frac{\tilde{r}}{6}, \theta - \theta_{c,1} < -\frac{5}{12}\tilde{r}, \\ c, & \text{if } r_2 \leq \tilde{r}, \lambda - \lambda_{c,2} < \frac{\tilde{r}}{6}, \theta - \theta_{c,2} > \frac{5}{12}\tilde{r}, \\ b, & \text{სხვა შემთხვევაში,} \end{cases}$	$r_i = \arccos(\sin \theta_{c,i} \sin \theta + \cos \theta_{c,i} \cos \theta \cos(\lambda - \lambda_{c,i}))$ $i = 1, 2 \quad \tilde{r} = 1/2 \quad c = 1 \quad b = 0$ $(\lambda_{c,1}, \theta_{c,1}) = (3\pi/4, 0) \quad (\lambda_{c,2}, \theta_{c,2}) = (5\pi/4, 0)$	(20)

6.2 რიცხვითი შედეგები

ICON-FFSL, სტანდარტული შეუღლებული სქემა და წყაროს წევრით შეუღლებული სქემა შედარებულია შემდეგ ტესტურ ამოცანებზე:

- მყარი სხეულის როტაცია კოსინუსის ზარებისთვის
- მყარი სხეულის როტაცია გაჭრილი ცილინდრისთვის
- დეფორმაციული ნაკადი ორი კოსინუსის ზარისთვის
- დეფორმაციული ნაკადი ორი გაჭრილი ცილინდრისთვის

რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები მოცემულია 3, 6, 8, 9, 5 ცხილებში და გრაფიკებზე.

შედეგებმა აჩვენა, რომ:

1. ნაკადის ლიმიტერის გარეშე სამივე რიცხვითი სქემა, ICON-FFSL, სტანდარტული შეუღლებული და ხელოვნური წყაროს წევრით შეუღლებული იძლევა თითქმის ერთნარი შედეგებს.

2. ICON-FFSL და წყაროს წევრით შეუღლებულ სქემებში ნაკადის ლიმიტერების გამოყენებისას, ორივე სქემა იძლევა ერთნაირ შედეგებს და ცდომილების ნორმებში არ არის მნიშვნელოვანი განსხვავება, თუ რომელ ლიმიტერს გამოვიყენებთ.

3. სტანდარტული შეუღლებულის ცდომილების ნორმები შედარებით დიდია, ვიდრე ICON-FFSL და წყაროს წევრით შეუღლებული სქემებისთვის, ვინაიდან სტანდარტულ შეუღლებულ სქემაში არ არის შესაძლებელი ნაკადის ლიმიტერების გამოყენება.

4. რიცხვითი გათვლები გაკეთებულია R2B4 ბადეზე 20480 სათვლელი წერტილით. თუ ნაკადის ლიმიტერები არ არის გამოყენებული, ბადის წერტილების თითქმის ნახევარში ირღვევა მაქსიმუმის პრინციპი და გვაქვს უარყოფითი მნიშვნელობებიც. ICON-FFSL და წყაროს წევრით შეუღლებულის შემთხვევაში, ნაკადის ლიმიტერების გამოყენებისას არ არის ასეთი პრობლემა.

ორივე მეთოდით აგებული შეუღლებული სქემა შედარებულ იქნა ასევე არადივერგენტული სიჩქარით დეფორმაციული ნაკადის და მოძრავი ვორტექსის ტესტურ ამოცანებზე. ცდომილების ნორმები მოცემულია ცხრილებში 7, 4, 5 და გრაფიკებზე. ექსპერიმენტებმა აჩვენა, რომ წყაროს წევრით შეუღლებული იძლევა უფრო აკურატულ შედეგებს, ვიდრე სტანდარტული შეუღლებული სქემა. უფრო ზუსტად:

1. სტანდარტული შეუღლებული სქემა ვერ ინარჩუნებს ფორმას, მაშინ რო-

ცა ნაკადის ლიმიტერებით წყაროს წევრით შეუღლებული სქემის შედეგი თითქმის არ განსხვავდება ზუსტი ამონახსნისგან.

2. სტანდარტული შეუღლებული სქემის ცდომილების ნორმები უფრო დიდია, ვიდრე წყაროს წევრით შეუღლებული სქემის.

3. სტანდარტული შეუღლებული სქემის შემთხვევაში ბადის სათვლელი წერტილების ნახევარზე მეტში დარღვეულია მაქსიმუმის პრინციპი.

4. ზოგიერთ ტესტურ ამოცანაში წყაროს წევრით შეუღლებული სქემა ცილევა უარყოფით შედეგებს ბადის თითქმის 1/3-ში, მაგნიტუდით 10^{-8} (3),(4) ნაკადის ლიმიტერის გამოყენებისას, თუმცა ასეთი წერტილების რაოდენობა საგრძნობლად მცირეა (3), (5) ნაკადის ლიმიტერის გამოყენებისას.

6.2.1 წრფივი ადვექციის ცხრილები

ცხრილი 3: მყარი სხეულის როტაცია: საწყისი სიჩქარის ვექტორი 1, კოსინუსის ზარი: საწყისი მონაცემი 1, ბადე R2B04, $T = 1036800$

ნორმები	ICON-FFSL, ულიმიტერო	სტ. შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ულიმიტერო	ICON-FFSL, ლიმიტერით (3), (4)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (4)	ICON-FFSL, ლიმიტერით (3), (5)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (5)
$l_{1,rel}$	2.230227E-02	4.617754E-02	2.230230E-02	1.399967E-02	1.399982E-02	1.358807E-02	1.358786E-02
$l_{2,rel}$	1.264162E-02	2.890380E-02	1.264118E-02	1.073500E-02	1.073535E-02	1.297653E-02	1.297682E-02
$l_{\infty,rel}$	1.145905E-02	2.296593E-02	1.145946E-02	1.516152E-02	1.516201E-02	2.414110E-02	2.414264E-02
$l_{1,abs}$	3.737112	7.697128	3.737118	2.330792	2.330815	2.247145	2.247110
$l_{2,abs}$	1.245850E-01	2.838235E-01	1.245807E-01	1.055754E-01	1.055789E-01	1.269004E-01	1.269032E-01
$l_{\infty,abs}$	1.134216E-02	2.273165E-02	1.134256E-02	1.500686E-02	1.500734E-02	2.389484E-02	2.389635E-02
Ushoot	9993	10007	9993	0	0	0	89
Min	-1.081394E-02	-1.164300E-02	-1.081451E-02	0	0	0	-5.023336E-11
Oshoot	0	2	0	4	4	4	4
მაქს.	9.897216E-01	9.952338E-01	9.897270E-01	9.909216E-01	9.909271E-01	9.905530E-01	9.905582E-01

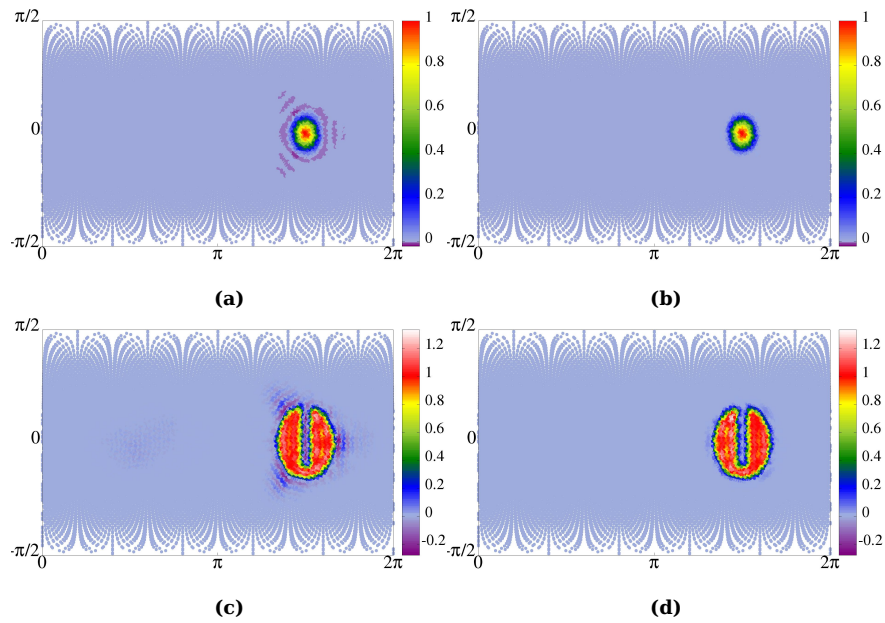
ცხრილი 4: დეფორმაციული ნაკადი: არადივერგენტული საწყისი სიჩქარის ვექტორი 2, გაჭრილი ცილინდრი: საწყისი მონაცემი 5, ბადე R2B04, $T = 1036800$

ნორმები	ICON-FFSL, ულიმიტერო	სტ. შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ულიმიტერო	ICON-FFSL, ლიმიტერით (3), (4)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (4)	ICON-FFSL, ლიმიტერით (3), (5)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (5)
$l_{1,rel}$	2.890181E-01	2.888711E-01	2.889820E-01	2.780968E-01	2.780884E-01	2.738582E-01	2.738496E-01
$l_{2,rel}$	2.940940E-01	2.942568E-01	2.940659E-01	3.042498E-01	3.042283E-01	3.015322E-01	3.015094E-01
$l_{\infty,rel}$	9.425960E-01	9.190518E-01	9.412042E-01	9.509492E-01	9.504477E-01	9.468321E-01	9.464949E-01
$l_{1,abs}$	6.834999E+02	6.832123E+02	6.834093E+02	6.576075E+02	6.575934E+02	6.475465E+02	6.475301E+02
$l_{2,abs}$	1.430822E+01	1.431595E+01	1.430670E+01	1.480470E+01	1.480354E+01	1.467501E+01	1.467376E+01
$l_{\infty,abs}$	9.425960E-01	9.190518E-01	9.412042E-01	9.509492E-01	9.504477E-01	9.468321E-01	9.464949E-01
Ushoot	8886	8879	8890	0	0	0	181
მინ.	-9.581544E-02	-1.741285E-01	-9.600165E-02	0	0	0	-1.739492E-09
Oshoot	910	910	909	796	796	837	837
მაქს.	1.193710	1.202044	1.193843	1.169024	1.169178	1.183066	1.183258

ცხრილი 5: მოძრავი ვორტექსები: საწყისი სიჩქარის ვექტორი 4, ვორტექსი: საწყისი მონაცემი 3, ბადე R2B04, $T = 1036800$

ნორმები	სტ. შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (4)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (5)
$l_{1,rel}$	2.412546E-02	1.411150E-03	1.411459E-03	1.411150E-03
$l_{2,rel}$	4.083858E-02	3.874989E-03	3.875515E-03	3.874989E-03
$l_{\infty,rel}$	2.048717E-01	3.017727E-02	3.017801E-02	3.017727E-02
$l_{1,abs}$	5.084637E+02	2.881504E+01	2.882144E+01	2.881504E+01
$l_{2,abs}$	6.294867	5.789490	5.790304	5.789490E-01
$l_{\infty,abs}$	3.148948E-01	4.638326E-02	4.638440E-02	4.638326E-02
Ushoot	44	1	1	1
მიწ.	4.483181E-01	4.629725E-01	4.629725E-01	4.629725E-01
Oshoot	259	1	1	1
მაქს.	1.613474	1.537027	1.537027	1.537027

6.2.2 წრფივი ადვექციის გრაფიკები



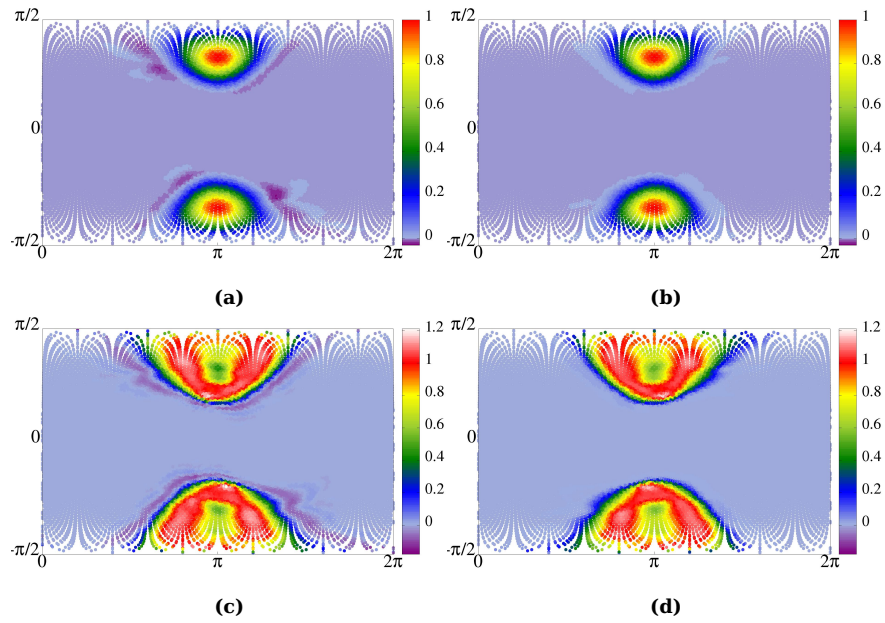
სურ 4: მყარი სხეულის როტაცია a) კოსინუსის ზარი, სტანდარტული შეუღლებული b) კოსინუსის ზარი, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3),(4) c) გაჭრილი ცილინდრი, სტანდარტული შეუღლებული d) გაჭრილი ცილინდრი, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (4).

7 მონაცემთა ასიმილაციის ექსპერიმენტები

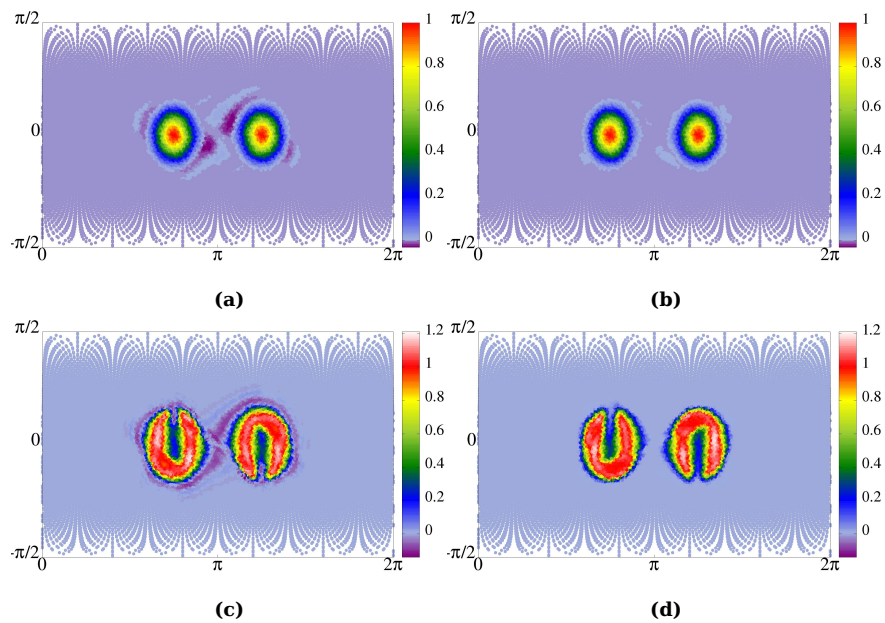
მოცემულ სექციაში განხილულია მონაცემთა ასიმილაციის ექსპერიმენტები და შედეგები. ასიმილაციის ტესტებში გამოყენებულია ე.წ იდენტური ტყუპი ექსპერიმენტები. ამ ტიპის ექსპერიმენტების არსი მდგომარეობს იმაში, რომ დაკვირვების ინფორმაცია ხელოვნურად გენერირებულია მოდელის მიერ. შესაბამისად, ასიმილაციის სისტემას არ მოეთხოვება ისეთი მონაცემების ასიმილაცია და ისეთი შედეგის მიღება, რაც ცდება თავად რიცხვითი მოდელის შესაძლებლობებს.

7.1 მონაცემთა ასიმილაციის ტესტური ამოცანა

სტანდარტული მეთოდით და ხელოვნური წყაროს წევრის მეთოდით აგებული შეუღლებული სქემების ეფექტურობა შედარებულია მონაცემთა ასიმილაციის ტესტურ ამოცანებზე. სტანდარტული შეუღლებული სქემა აგების

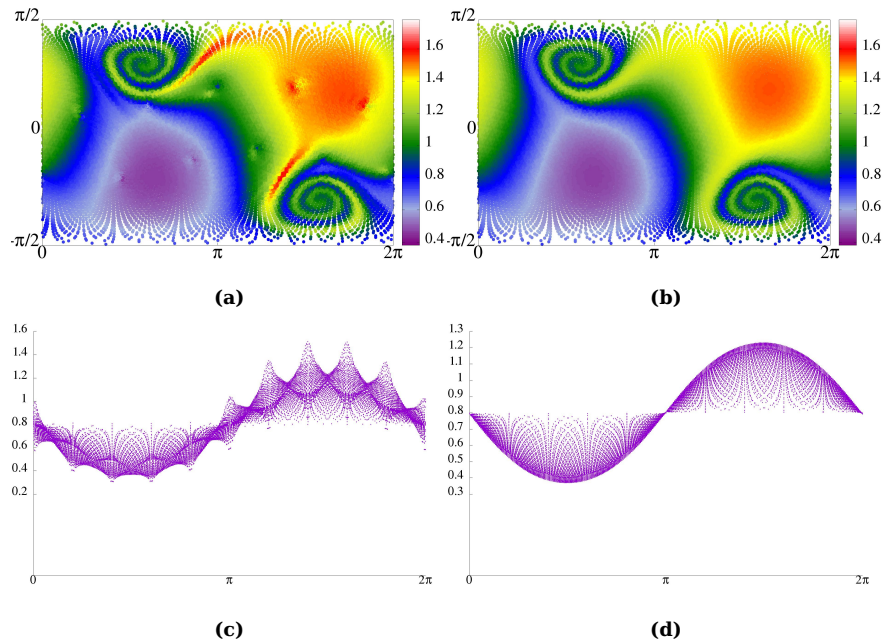


სურ 5: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} = 0$: a) კოსინუსის ზარები, სტანდარტული შეუღლებული, b) კოსინუსის ზარები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (4) c) გაჭრილი ცილინდრი, სტანდარტული შეუღლებული, d) გაჭრილი ცილინდრი, წყაროს წევრით შეუღლებული (3), (4).



სურ 6: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$ a) კოსინუსის ზარები, სტანდარტული შეუღლებული, b) კოსინუსის ზარები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (4) c) გაჭრილი ცილინდრი, სტანდარტული შეუღლებული, b) გაჭრილი ცილინდრი, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (4).

მეთოდიდან გამომდინარე ლიმიტერის გარეშეა, ხოლო ხელოვნურ წყაროს წევრში გამოყენებულია (3), (4) ლიმიტერი. ზოგიერთ ტესტურ ექსპერიმენტში შეუღლებული წყაროს წევრით ლიმიტერის გარეშე არის გამოყენებული, ვინაიდან ადვექციის ექსპერიმენტებმა აჩვენა, რომ სტანდარტულ შეუღ-



სურ 7: a)-b) - მოძრავი ვორტექსები, c)-d) - solid body როტაციის სიჩქარის ვექტორები, მოძრავი vortex საწყისი მონაცემი, გრაფიკის ხედვის კუთხე ($90^\circ, 0^\circ$), $t = T/2$: a) სტანდარტული შეუღლებული, b) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (5) c) სტანდარტული შეუღლებული d) წყაროს წევრით შეუღლებული (3), (4).

ლებულს და წყაროს წევრით შეუღლებულს ლიმიტერის გარეშე ერთი და იგივე შედეგები აქვს მიახლოებით. ექსპერიმენტებისთვის შეირჩა შემდეგი სამი საწყისი მონაცემის და სიჩქარის ვექტორების კომბინაციები:

1. მოძრავი ვორტექსი მე-3 საწყისი მონაცემით 2 ცხრილიდან და მე-4 სიჩქარის ვექტორით 1 ცხრილიდან.
2. დეფორმაციული ნაკადი კოსინუსის ზარებისთვის, რომელიც შეესაბამება მე-4 საწყის მონაცემს 2 ცხრილიდან და მე-3 სიჩქარის ვექტორს 1-დან.
3. დეფორმაციული ნაკადი ჩაჭრილი ცილინდრისთვის, რომელიც შეესაბამება მე-5 საწყის მონაცემს 2-დან და მე-3 სიჩქარის ვექტორს 1-დან.

მოძრავი ვორტექსისთვის $div(\vec{v}) = 0$, ხოლო დეფორმაციული ნაკადის შემთხვევაში $div(\vec{v}) \neq 0$.

ექსპერიმენტებში (28) ფუნქციონალში გამოყენებულია ბეგრანდ ნაწილის დისკრეტიზაცია (33)-ის შესაბამისად, ხოლო დაკვირვების ნაწილის

დისკრეტიზაცია (34)-ის შესაბამისად. ვინაიდან ნაშრომის მიზანს არ წარმოადგენს კოვარიაციის მოდულების შესწავლა, ამიტომ K_b და K_o მატრიცები არის ერთეულოვანი მატრიცებია. ფუნქციონალში შემავალი მონაცემებია q_b ბექგრაუნდ ინფორმაციის ფუნქცია და q_o დაკვირვების ინფორმაციის ფუნქცია. შესაბამისად, ტესტურ ამოცანებში დაკვირვების და ბეგრაუნდ ინფორმაციის საწყისი მნიშვნელობები სხვადასხვანაირად არის განსაზღვრული. კერძოდ q_o არის განსაზღვრული შემდეგნაირად:

- მოძრავი ვორტექსის ტესტურ ამოცანებში ზუსტი ამონახსნი ცნობილია დროის ნებისმიერ t მომენტში. შესაბამისად ზუსტი ამონახსნი გამოიყენება დროსა და სივრცეში წინასწარ შერჩეულ დაკვირვების წერტილებში, ანუ $q_o(t_k, \xi_i) = u_{exact}(t_k, \xi_i)$, $k = 1, 2, \dots, N_T$, $i \in \mathcal{O}$.
- დეფორმაციული ნაკადის ტესტურ ამოცანებში ზუსტი ამონახსნი დროის ნებისმიერ t მომენტში არ არის ცნობილი და ამიტომ იდენტური ტყუპი ექსპერიმენტის პირობებში ICON-FFSL სქემა იქნება გამოყენებული დაკვირვების ინფორმაციის გენერირებისთვის, ანუ $q_o(t_k, x_i) = u_{ICON-FFSL}(t_k, x_i)$, $k = 1, 2, \dots, N_T$, $i \in \mathcal{O}$.

სხვადასხვა ექსპერიმენტში დაკვირვების წერტილების რაოდენობა და მდებარეობა განსხვავდება და თან ერთვის ექსპერიმენტის აღწერილობას. ბექგრაუნდის საწყისი მნიშვნელობად აიღება ნამდვილი საწყისი მონაცემი მასში მცირედი ცდომილების შეტანით. კერძოდ:

- მოძრავი ვორტექსის ასიმულაციის ექსპერიმენტებში ბექგრაუნდ ინფორმაციის საწყისი მნიშვნელობა არის ნამდვილ საწყის მნიშვნელობას დამატებული 10%-იანი ცდომილება ყველა კვანძით წერტლში.
- დეფორმაციული ნაკადის ასიმულაციის ექსპერიმენტებში ნამდვილ საწყის მონაცემში ცდომილება შეტანილია მხოლოდ სათვლელი არის ერთ ნახევარში, ისე რომ მაგალითად კოსინუსის ზარების ან ჩაჭრილი

ცილინდრების შემთხვევაში ერთ ფიგურაში ცდომილება არის, ხოლო მეორე უცვლელად ემთხვევა ნამდვილ საწყის მონაცემს. ცდომილების შემცველ ნახევარში, იმ წერტილებში სადაც ფუნქცია განსხვავებულია 0-სგან, 10%-იანი ცდომილება არის შეტანილი, ხოლო თუ ფუნქციის მნიშვნელობა ნულია, მაშინ ნამდვილი საწყისი მონაცემის მაქსიმალური მნიშვნელობის 1% ემატება მხოლოდ.

მოცემული ცდომილებების შემოღების შედეგად განსხვავდება ნამდვილი საწყისი მნიშვნელობა და ბექგრაუნდის საწყისი მნიშვნელობა. დეტალური სხვაობის შესახებ მოცემულია 10 ცხრილში.

მინიმიზაციის პროცესისთვის გამოიყენება კვაზი-ნიუტონის Limited-Memory-Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (LBFGS) (23) მეთოდი. აგებული შეუღლებული სქემები გამოიყენება ფუნქციონალის დაკვირვების ნაწილის გრადიენტის საპოვნელად, რაც შემდეგ საჭიროა LBFGS მეთოდში. ICON-FFSL სქემა გამოიყენება შემავალი დაკვირვების ინფორმაციის გენერირებისთვის, რომელიც შემდეგ საჭიროა შეუღლებულ ამოცანაში. შეუღლებული სქემების შესადარებლად გამოიყენება ფუნქციონალის მნიშვნელობა მინიმიზაციის შემდეგ. ასევე, სადაც შესაძლებელია, გამოიყენება სხვაობა ნამდვილ საწყის მონაცემსა და მინიმიზაციის შედეგად მიღებულ საწყის მონაცემს შორის. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგების დეტალები მოცემულია შემდეგ ქვეთავში, ასევე შედეგები წარმოდგენილია 8.4 და 8.3 დანართებში.

7.2 იტერაციული პროცესის კრებადობა

მოცემულ ნაწილში შესწავლილია აგებული შეუღლებული სქემების ყოფაქცევა ფიქსირებული 300 LBFGS იტერაციის შემთხვევაში, იმ პირობით რომ 300 იტერაციის საკმარისია კრებადობის პროცესის დემონსტრირებისთვის. გამოთვლებში გამოიყენებულია ICON-ის R2B4 ბადე 5120 დაკვირვების წერტილით, ისე რომ დაკვირვების წერტილები თანაბრად არის გა-

დანაწილებული ბადეზე. ამ შემთხვევაში ბადის ყოველ მე-4 კვანძით წერტილზე ხდება დაკვირვება. მოძრავი ვორტექსის ექსპერიმენტებში ფუნქციონალის საწყისი მნიშვნელობა არის მიახლოებით $2.5 \cdot 10^6$, ხოლო მინიმიზაციის შემდეგ სტანდარტული შეუღლებულის გამოყენებისას შემცირდა 131.9-მდე, ხოლო ლიმიტერიანი ხელოვნური წყაროს წევრით შეუღლებულისთვის 30.7-მდე და ლიმიტერის გარეშე - 19.2-მდე. სამივე შემთხვევისთვის მინიმიზაციის პროცესი გრაფიკულად ნაჩვენებია 24b-ზე და 24c-ზე. როგორც გრაფიკებზე ჩანს, პირველი 10 იტერაციისას სტანდარტული შეუღლებულით უფრო სწრაფად ხდება მინიმიზაცია, ხოლო 100 იტერაციის შემდეგ წყაროს წევრით შეუღლებულის შედეგია უკეთესი. 300 იტერაციის შემდეგ კი წყაროს წევრით შეუღლებულის, მხოლოდ ლიმიტერის გარეშე შედეგია ყველაზე უკეთესი. 24b-ზე ნაჩვენებია ოსცილაციები LBFGS მეთოდში გადატვირთვის შედეგია. გადატვირთვა ხდება, როდესაც ალგორითმი 5-ჯერ ეცდება შესაბამისი α ბიჯის მოძებნას, რომელიც დააკმაყოფილებს Wolfe პირობას (23)-დან. გადატვირთვის შემდეგ ბექგრაუნდ ინფორმაცია განახლდება მინიმიზაციის ბოლოს მიღებული საწყისი პირობით და ამის შემდეგ ხელახლა დაიწყება ახალი მინიმიზაცია. გრაფიკებზე ცანს, რომ გადატვირთვის შემდეგ ფუნქციონალის მნიშვნელობა იზრდება და შემდეგ ისევ იწყებს შემცირებას. ასეთი ყოფაქცევა შეინიშნება სამივე შეუღლებულის შემთხვევაში.

სხვადასხვა მეთოდით აგებული შეუღლებული სქემის გამოყენებისას განსხვავებული შედეგები მიიღება. განხილულმა ექსპერიმენტმა აჩვენა, რომ სტანდარტული შეუღლებული უკეთ აკეთებს დაკვირვების ნაწილის მინიმიზაციას, ხოლო ხელოვნური წყაროს წევრიანი შეუღლებულები უკეთესია ბექგრაუნდის ნაწილის მინიმიზაციისთვის. აქედან ჩანს სწორად შერჩეული შეუღლებული სქემის მნიშვნელობა: გრადიენტი გამოითვლება შეუღლებული რიცხვითი სქემით და განსაზღვრავს კლებადობის მიმართუ-

ლებას. შესაბამისად სხვადასხვანაირი შეუღლებულის გამოყენებისას მივიღებთ მინიმუზაციის სხვადასხვანაირ პროცესს და შეიძლება შემცირდეს ფუნქციონალის ერთი ნაწილი, ხოლო მეორე ნაწილის შემცირების საჭიროება შესაძლოა საერთოდ არ იქნას აღქმული.

სტანდარტული მეთოდით და ხელოვნური წყაროს წევრის დამატებით აგებული შეუღლებული სქემები შესწავლილი იქნა კრებადობაზე. ამისათვის გამოყენებული იქნა დეფორმაციული ნაკადის ტესტი კოსინუსის ზარებით ICON-ის R2B4 ბადეზე 5120 დაკვირვების წერტილით. ფუნქციონალის საწყისი მნიშვნელობა იყო მიახლოებით $3.5 \cdot 10^4$, ხოლო 300 იტერაციის შემდეგ სტანდარტული შეუღლებულის გამოყენების შემთხვევაში გახდა 2.2 და წყაროს წევრის დამატებით აგებული შეუღლებულის გამოყენებისას $4 \cdot 10^{-2}$. შედეგების გათვალისწინებით ორივე მეთოდი არის კრებადი. მინიმუზაციის კრებადობის პროცესი ნაჩვენებია 23b და 23c გრაფიკებზე. პირველი 30 იტერაციისას სტანდარტული შეუღლებულის შედეგი უკეთესია, ხოლო 30 იტერაციის შემდეგ კი წყაროს წევრიანი შეუღლებულის ფუნქციონალის მნიშვნელობა უფრო მცირეა. რიცხვითი შედეგების მიხედვით შეუღლებულის აგების ორივე მეთოდი კრებადია და 300 იტერაციის შემდეგ ფუნქციონალის საწყისი მნიშვნელობა თითქმის 10^5 -ჯერ შემცირდა.

7.3 დაკვირვების წერტილების ზეგავლენა მინიმუზაციის პროცესზე

7.1 ქვეთავში მოცემული ექსპერიმენტების გათვლები ჩატარებულია ICON-ის R2B4 ბადეზე და აღებულია 2560, 5120, 10240 და 20480 დაკვირვების წერტილები. შედეგად ხდება მთლიანი ბადის კვანძითი წერტილების 12.5%, 25%, 50% და 100%-ის დაკვირვება დროის ყველა მომენტში 50 LBFGS იტერაციისას. იმის გათვალისწინებით, რომ R2B4 ბადეზე 20480 წერტილია, ამავე რაოდენობის დაკვირვების წერტილების აღებისას განვიხილავთ იდეალიზირებულ ექსპერიმენტს, როდესაც ბადის ყველა წერტილის

დაკვირვება ხდება დროის ყველა მომენტში. რიცხვითი შედეგები წარმოდგენილია 25b გრაფიკზე დეფორმაციული ნაკადის და კოსინუსის ზარების შემთხვევისთვის, 25c-ზე კი დეფორმაციული ნაკადის და ჩაჭრილი ცილინდრის შემთხვევაში, შედეგების მიხედვით:

- სტანდარტული შეუღლებულის გამოყენებისას, დაკვირვების წერტილების ზრდასთან ერთად ფუნქციონალის მნიშვნელობა მონოტონურად იზრდება. მოძრავი ვორტექსის შემთხვევაში, სათვლელი ბადის კვანძითი წერტილების 25%-ის დაკვირვებისას ფუნქციონალის მნიშვნელობა თავიდან მცირდება და შემდეგ დაკვირვების წერტილების ზრდასთან ერთად იზრდება მონოტონურად.
- ლიმიტერით ხელოვნური წყაროს წევრიანი შეუღლებულის გამოყენებისას, დეფორმაციული ნაკადის ტესტის კოსინუსის ზარებისთვის ფუნქციონალის მნიშვნელობა მცირდება დაკვირვების წერტილების ზრდასთან ერთად. ჩაჭრილი ცილინდრისთვის ფუნქციონალის მნიშვნელობა იზრდება 100%-იანი დაკვირვებისას, თუმცა სტანდარტულ შეუღლებულთან შედარებით ზრდა არ აც ისე სწრაფად ხდება. მოძრავი ვორტექსის შემთხვევაში ფუნქციონალის მნიშვნელობა მცირდება, თუმცა 50%-იანი დაკვირვებისას გვაქვს ოსცილაციები.

რიცხვითმა შედეგებმა აჩვენა, რომ იტერქციების ეფექტურობა მცირდება როდესაც დაკვირვების წერტილების რაოდენობა იზრდება. ანუ იგივე რაოდენობის იტერაციებში ფუნქციონალის მნიშვნელობა უფრო დიდია, რაც უფრო მეტი კვანძითი წერტილის დაკვირვება ხდება. განსხვავებული შეუღლებულის გამოყენებისას მიიღება განსხვავებული მინიმიზაციის შედეგები და წყაროს წევრიანი შეუღლებული სქემას აქვს უფრო საიმედო ყოფაქცევა როდესაც დაკვირვების წერტილების რაოდენობა იზრდება.

7.3.1 ბადის გახშირების ზეგავლენა მინიმიზაციაზე

ბადის გახშირების გამოყენება სტანდარტული მიდგომაა რიცხვითი მეთოდის კრებადობის შესწავლისას. ბადის გახშირებისას კრებადი მეთოდების სიზუსტე იზრდება, ამიტომ ICON FFSL სქემის და მისი შესაბამისი შეუღლებული სქემების სიზუსტე უფრო მაღალი უნდა იყოს უფრო ხშირ ბადეზე. მოცემულ სექციაში შევისწავლით ბადის გახშირების ზეგავლენას ვარიაციულ მონაცემთა ასიმილაციაზე. წინა რიცხვით ექსპერიმენტებში გამოყენებული იყო $R2B4$ ბადე. ამჯერად გამოვიყენებთ $R2B4$, $R2B5$, $R2B6$, $R2B7$ ბადეებს ფიქსირებული 20480 დაკვირვების წერტილით, ისე რომ დაკვირვებადი იქნება ბადის კვანძითი წერტილების 100%, 25%, 6.25% და 1.5625%. ფუნქციონალის მნიშვნელობები მოცემულია 11 ცხრილში. სედეგებიდან ჩანს, რომ ბადის გახშირებასთან ერთად ფუნქციონალის საბოლოო მნიშვნელობა იზრდება. დაკვირვების წერტილების რაოდენობა უცვლელია, ასევე ფუნქციონალის საწყისი მნიშვნელობა ყველა ბადის შემთხვევაში თითქმის ერთნაირია. 50 იტერაციის შემდეგ ფუნქციონალის საბოლოო მნიშვნელობა საგრძნობლად განსხვავდება სხვადასხვა შეუღლებულის გამოყენებისას. უფრო ზუსტად, ლიმიტურით ხელოვნური წყაროს წევრიანი შეუღლებულის გამოყენებისას ფუნქციონალის საბოლოო მნიშვნელობა 8-დან 660-მდე უფრო მცირეა, ვიდრე სტანდარტული შეუღლებულის გამოყენებისას.

7.4 წონებით მანიპულირება

მოცემულ ქვეთავში განხილულია ფუნქციონალში წონებით მანიპულირების ზეგავლენა მინიმიზაციაზე. კერძოდ, ბექგრაუნდის და დაკვირვების ნაწილების წონების ცვლილებით შესაძლებელია თითოეული ნაწილის პრიორიტიზირება. წინა ექსპერიმენტებში წონები თანაბრად იყო გადანაწილებული და თითოეულის მნიშვნელობა იყო 0.5. ექსპერიმენტების ამ ნაწილში ეტაპობრივად ვზრდით დაკვირვების ნაწილის წონას 1-მდე, და ამავდრო-

ულად გამცირებთ ბექგრაუნდის ნაწილის წონას 0-მდე. შესაბამისად, ფუნქციონალის მნიშვნელობა $R2B4$ ბადეზე 50 LBFGS იტერაციისა და 5120 დაკვირვების წერტილისთვის მოცემულია 26b და 26c გრაფიკებზე. გრაფიკებიდან ჩანს, რომ:

- მოძრავის ვორტექსის ექსპერიმენტში ფუნქციონალის მნიშვნელობა მცირდება დაკვირვების ნაწილის წონის გაზრდასთან ერთად. ულიმიტერო ხელოვნური წყაროს წევრით აგებული შეუღლებულის გამოყენებისას ფუნქციონალის მნიშვნელობა მინიმიზაციის შემდეგ უფრო მცირეა, ვიდრე ლიმიტერის გამოყენებისას. როდესაც დაკვირვების ნაწილის წონა 1-ია, ხოლო ბეგრაუნდ ნაწილი არ გაქვს, მაშინ $J_{o,Art.S.NoLimiter} / J_{o,Art.S.WithLimiter} = 0.248777957$.
- დეფორმაციული ნაკადის ექსპერიმენტში კოსისნუსის ზარებისთვის, ფუნქციონალის მნიშვნელობა მცირდება დაკვირვების წონის ზრდასთან ერთად. სტანდარტულ შეუღლებულთან შედარებით, ლიმიტერიანი ხელოვნური წყაროს წევრით აგებული შეუღლებული სქემის გამოყენებისას, ფუნქციონალის მნიშვნელობა უფრო მცირეა $J_{o,Std.Adjoint} / J_{o,Art.S.WithLimiter} = 1.878180425$.
- დეფორმაციული ნაკადის ექსპერიმენტში ჩაჭრილი ცილინდრისთვის, ფუნქციონალის მნიშვნელობა დაკვირვების ნაწილის წონის ზრდასთან ერთად იმატებს. სტანდარტული შეუღლებულის გამოყენებისას მნიშვნელობა უფრო სწრაფად იზრდება და $J_{o,Std.Adjoint} / J_{o,Art.S.WithLimiter} = 58.210774364$.

როდესაც ფუნქციონალში მხოლოდ დაკვირვების ნაწილია და ბექგრაუნდ ნაწილი არ გამოიყენება, მაშინ შესაძლებელია ასიმილაციის შედეგისა და ნამდვილი საწყისი მონაცემის შედარება. შედეგები მოცემულია 10 ცხრილში და:

- მოძრავი ვირტუალის ექსპერიმენტებში ზოგიერთი ცდომილება მიახლოებით 2-ჯერ მცირეა ულიმიტერო წყაროს წევრით შეუღლებულის შემთხვევაში, ვიდრე ლიმიტერის გამოყენებისას.
- დეფორმაციული ნაკადის ექსპერიმენტებში კოსინუსის ზარებისთვის სტანდარტული შეუღლებული უკეთეს შედეგს იძლევა ლიმიტერიანი ხელოვნური წყაროს წევრიანი შეუღლებულთან შედარებით, $l_1, l_{1,rel}, l_2, l_{2,rel}$ ცდომილებების ნორმები მცირედით პატარაა, ხოლო $l_\infty, l_{\infty,rel}$ ნორმები თითქმის 3-ჯერ მცირეა.
- დეფორმაციული ნაკადის ექსპერიმენტებში ჩაჭრილი ცილინდრებისთვის ლიმიტერით ხელოვნური წყაროს წევრიანი შეუღლებული იძლევა მიახლოებით 7-ჯერ მცირე ცდომილების ნორმებს სტანდარტულ შეუღლებულთან შედარებით.
- მონაცემთა ასიმილაციის შედეგად $l_1, l_{1,rel}, l_2, l_{2,rel}$ ცდომილების ნორმები შემცირდა საწყის ცდომილებასთან შედარებით, ხოლო $l_\infty, l_{\infty,rel}$ ნორმები უცვლელი დანჩა ან მცირედით მოიმატა.

რომ შევაჯამოთ მიღებული შედეგები, გრაფიკები და ცხრილები. ფუნქციონალის მნიშვნელობა კარგი ინდიკატორია შეუღლებული სქემების შესადარებლად. თუ ფუნქციონალის მნიშვნელობა მინიმიზაციის შემდეგ მცირეა, მაშინ მინიმიზაციის პროცესის შედეგად მიღებული ვარიაციული მონაცემტა ასიმილაციის ამონახსნი წარმოადგენს ნამდვილი საწყისი პირობის კარგ მიახლოებას. ასეთი შედეგი მიიღება მოზრავი ვორტექსის და ჩაჭრილი ცილინდრის ექსპერიმენტებში. კოსინუსის ზარების შემთხვევაში ასეთი შედეგი მიიღება 20480 დაკვირვების წერტილისას და არა 5120 წერტილისას.

8 დანართი

8.1 რიცხვითი შედეგები: წრფივი ადვექციის ცხრილები

ცხრილი 6: მყარი სხეულის როტაცია: საწყისი სიჩქარის ვექტორი 1, ჩაჭრილი ცილინდრი: საწყისი მონაცემი 2, ბადე R2B04, $T = 1036800$

ცდომილების ნორმები	ICON-FFSL, ულიმიტერო	სტ. შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ულიმიტერო	ICON-FFSL, ლიმიტერით (3), (4)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (4)	ICON-FFSL, ლიმიტერით (3), (5)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (5)
$l_{1,rel}$	3.069264E-01	3.171004E-01	3.069262E-01	2.522601E-01	2.522586E-01	2.599566E-01	2.599549E-01
$l_{2,rel}$	2.673495E-01	2.693426E-01	2.673488E-01	2.676666E-01	2.676659E-01	2.736425E-01	2.736418E-01
$l_{\infty,rel}$	7.106978E-01	6.999076E-01	7.107034E-01	8.149918E-01	8.150041E-01	8.057034E-01	8.057114E-01
$l_{1,abs}$	3.157555E+02	3.263074E+02	3.157552E+02	2.593519E+02	2.593502E+02	2.669324E+02	2.669305E+02
$l_{2,abs}$	8.582671	8.649268	8.582646	8.586382	8.586358	8.773138	8.773115
$l_{\infty,abs}$	7.106978E-01	6.999076E-01	7.107034E-01	8.149918E-01	8.150041E-01	8.057034E-01	8.057114E-01
Undershoot	9666	9649	9666	0	0	0	117
Minimum	-2.736402E-01	-2.657430E-01	-2.736436E-01	0	0	0	-8.511675E-10
Overshoot	435	431	435	415	415	414	414
Maximum	1.2450956	1.246481	1.245110	1.284667	1.284693	1.327834	1.327850

ცხრილი 7: დეფორმაციული ნაკადი: საწყისი არადივერგენტული სიჩქარის ვექტორი 2, კოსინუსის ზარები: საწყისი მონაცემი 4, ბადე R2B04, $T = 1036800$

ცდომილების ნორმები	ICON-FFSL, ულიმიტერო	სტ. შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ულიმიტერო	ICON-FFSL, ლიმიტერით (3), (4)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (4)	ICON-FFSL, ლიმიტერით (3), (5)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (5)
$l_{1,rel}$	3.256092E-02	4.011542E-02	3.256965E-02	2.342655E-02	2.341489E-02	1.895446E-02	1.894835E-02
$l_{2,rel}$	2.464795E-02	2.847823E-02	2.463155E-02	2.138599E-02	2.136528E-02	1.901537E-02	1.899423E-02
$l_{\infty,rel}$	3.967162E-02	4.035984E-02	3.958678E-02	3.179198E-02	3.170231E-02	2.966709E-02	2.957616E-02
$l_{1,abs}$	2.438983E+01	2.999117E+01	2.439604E+01	1.759734E+01	1.758865E+01	1.427368E+01	1.426911E+01
$l_{2,abs}$	5.131036E-01	5.930658E-01	5.127594E-01	4.469183E-01	4.464925E-01	3.979740E-01	3.975392E-01
$l_{\infty,abs}$	3.966944E-02	4.035763E-01	3.958461E-02	3.179024E-02	3.170058E-02	2.966546E-02	2.957454E-02
Undershoot	9201	9209	9208	0	0	0	1167
Minimum	-2.355757E-02	-2.397034E-02	-2.360643E-02	0	0	0	-8.922257E-10
Overshoot	0	1	0	0	0	0	0
Maximum	9.9958314E-01	1.004633	9.994996E-01	9.988715E-01	9.987885E-01	9.991847E-01	9.991020E-01

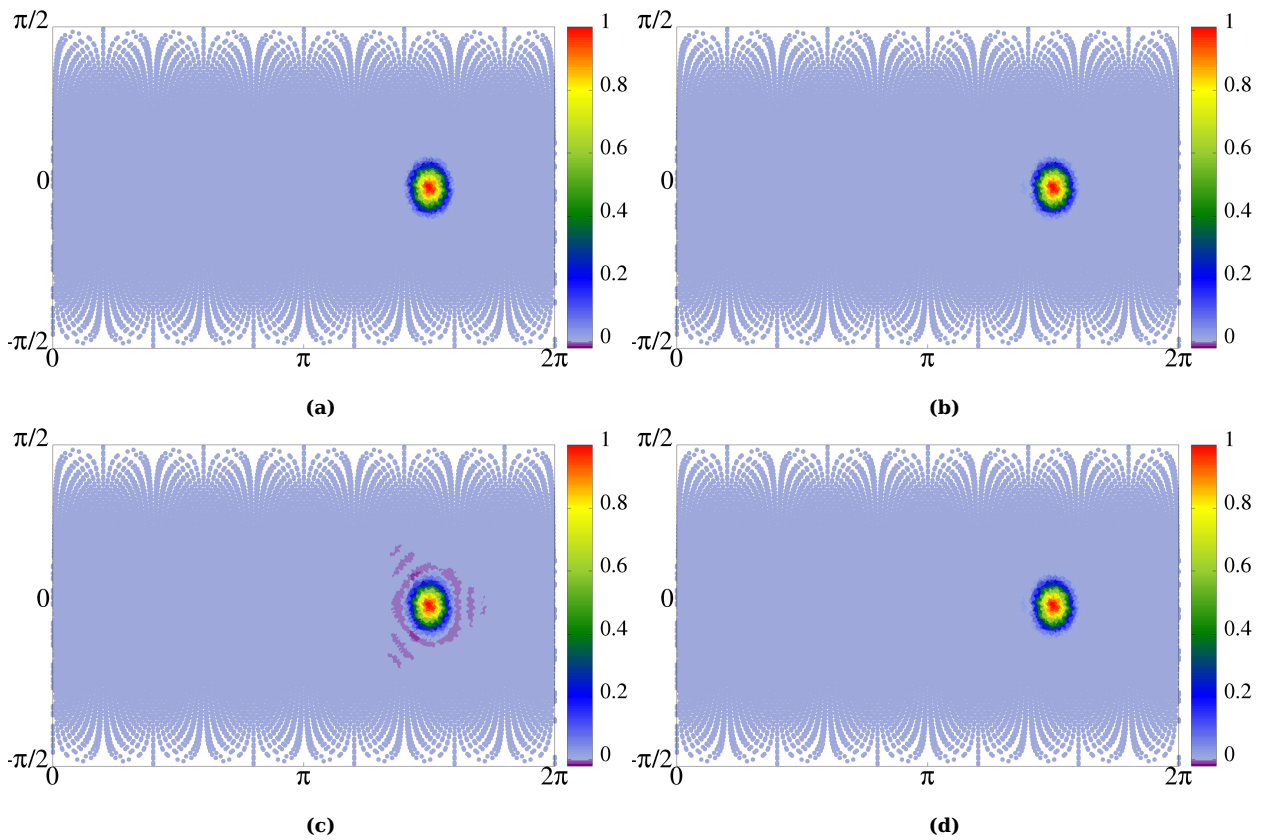
ცხრილი 8: დეფორმაციული ნაკადი: საწყისი დივერგენტული სიჩქარის ვექტორი 3, კოსინუსის ზარები: საწყისი მონაცემი 4, ბადე R2B04, $T = 1036800$

ცდომილების ნორმები	სტ. შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (4)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (5)
$l_{1,rel}$	4.029138E-002	3.311189E-002	1.753717E-002	1.627544E-002
$l_{2,rel}$	3.351494E-002	2.831085E-002	1.925266E-002	1.848417E-002
$l_{\infty,rel}$	5.717197E-002	4.793155E-002	3.574307E-002	3.388867
$l_{1,abs}$	3.013273E+001	2.479282E+001	1.305616E+001	1.210955E+001
$l_{2,abs}$	6.964130E-001	5.885914E-001	3.994988E-001	3.835561E-001
$l_{\infty,abs}$	5.710458E-002	4.787505E-002	3.570094E-002	3.384873E-001
Undershoot	9187	9189	0	7135
Minimum	-3.020335E-002	-2.661911E-002	0	-1.572671E-008
Overshoot	0	0	0	0
Maximum	9.955241E-001	9.937946E-001	9.933643E-001	9.933694E-001

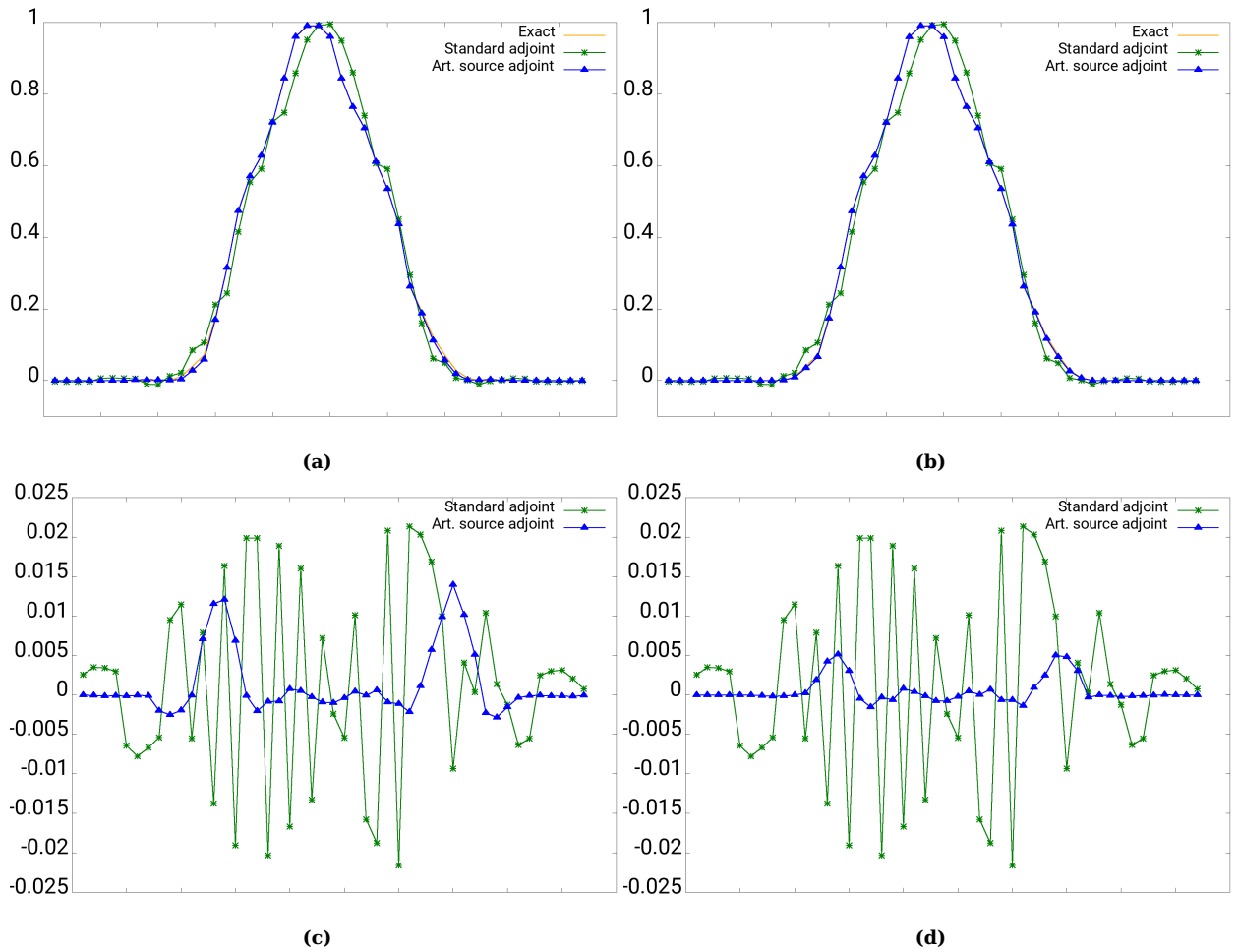
ცხრილი 9: დეფორმაციული ნაკადი: საწყისი დივერგენტული სინქარის ვექტორი 3, ჩაჭრილი ცილინდრი: საწყისი მონაცემი 5, ბადე R2B04, $T = 1036800$

ცდომილების ნორმები	სტ. შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ულიმიტერო	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (4)	წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტერით (3), (5)
$l_{1,rel}$	3.201877E-001	3.072660E-01	2.959957E-01	2.911967E-01
$l_{2,rel}$	3.004045E-001	2.950234E-01	3.033951E-01	3.008232E-01
$l_{\infty,rel}$	8.202367E-001	8.689133E-01	8.527525E-01	8.511831E-01
$l_{1,abs}$	6.792025E+002	6.511061E+02	6.267315E+02	6.163679E+02
$l_{2,abs}$	1.383153E+001	1.357617E+01	1.396507E+01	1.384493E+01
$l_{\infty,abs}$	8.202369E-001	8.689133E-01	8.527525E-01	8.511831E-01
Undershoot	8935	8867	14	7445
Minimum	-1.334238E-001	-1.173093E-01	-4.796964E-15	-4.019092E-09
Overshoot	858	839	791	801
Maximum	1.200032	1.185067	1.177634	1.179568

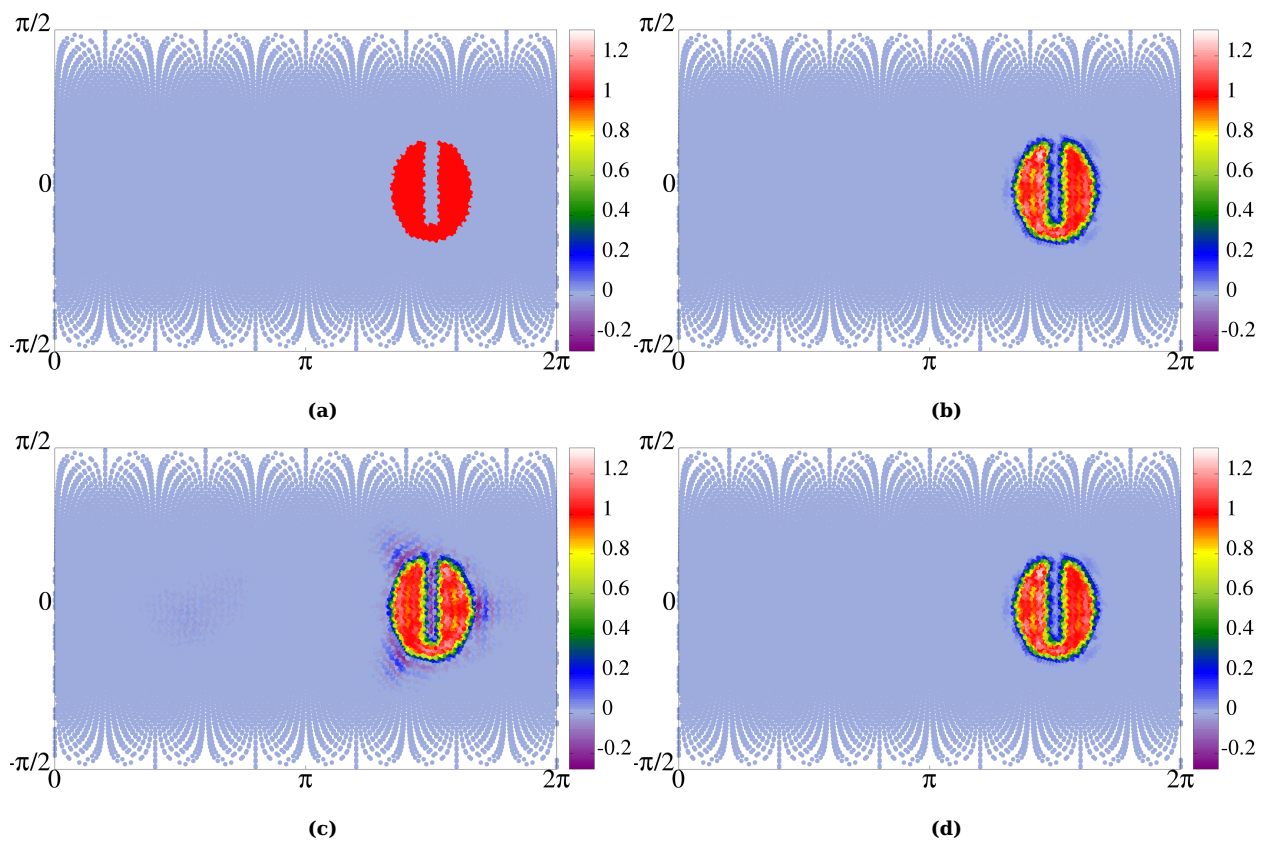
8.2 რიცხვითი შედეგები: წრფივი ადვექციის ტესტის გრაფიკები



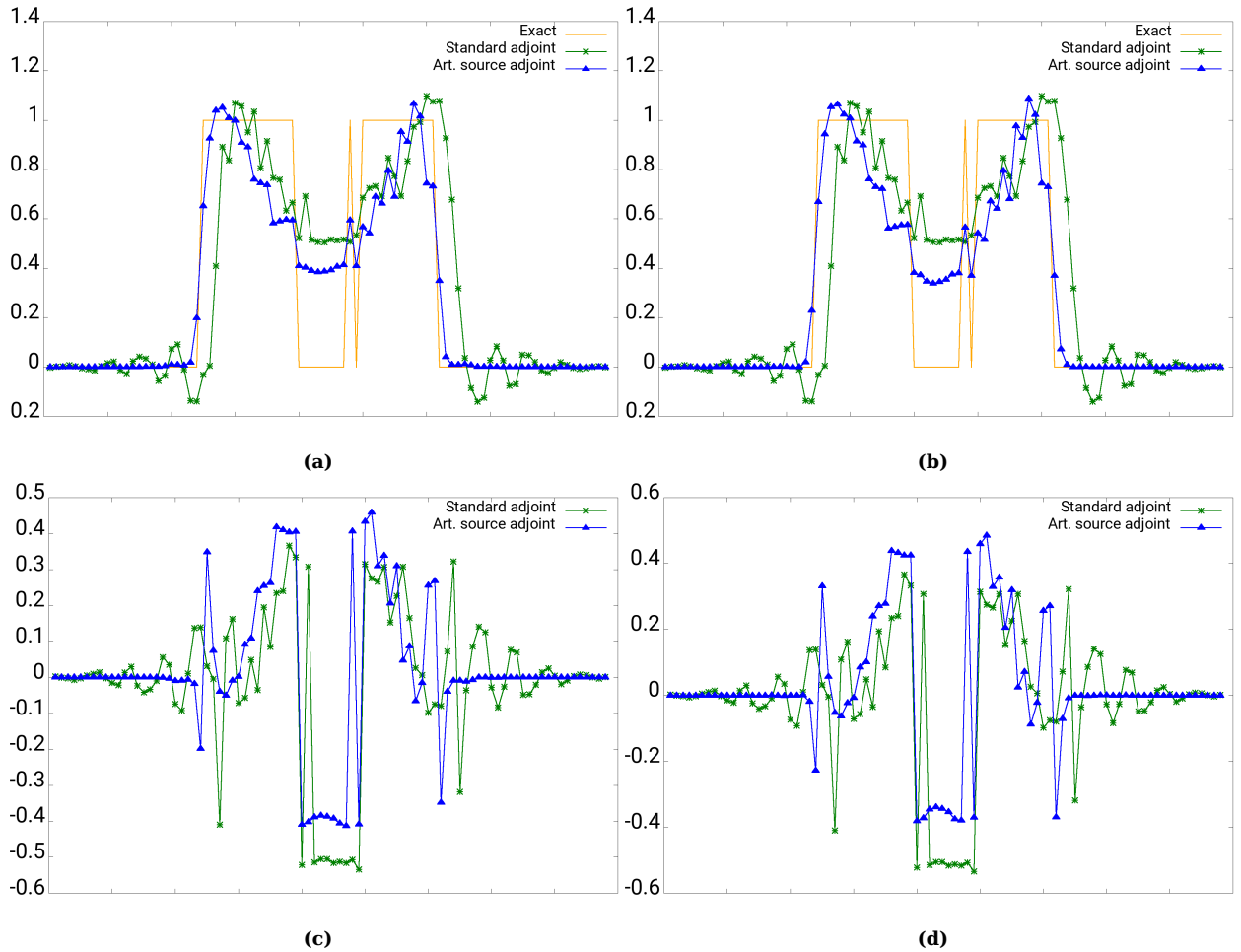
სურ 8: მყარი სხეულის როტაცია, კოსინუსის ზარი: a) ზუსტი ამონახსნი b) ICON-FFSL, ლიმიტერი (3), (5) c) სტანდარტული შეუღლებული d) შეუღლებული ხელოვნური წყაროს წევრის დამატებით, ლიმიტერი (3), (5)



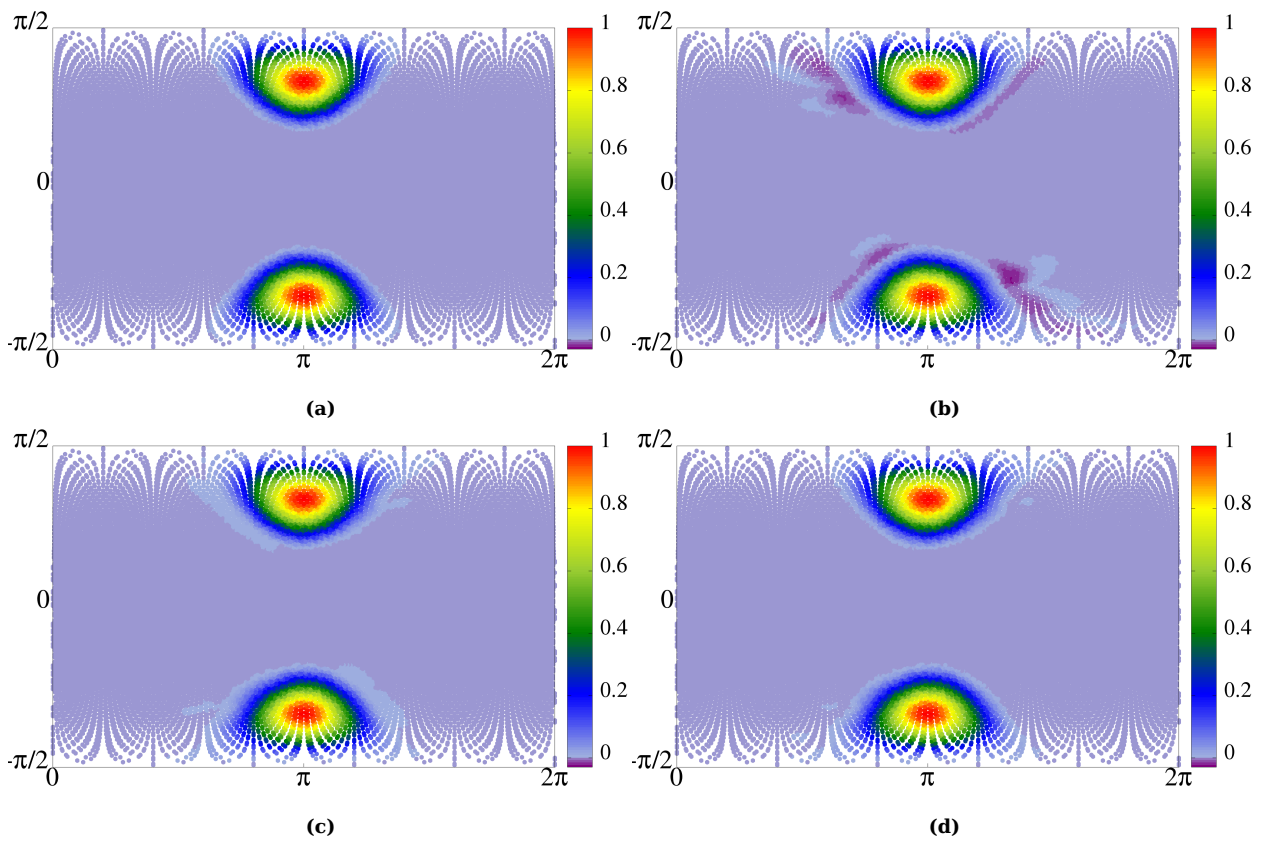
სურ 9: მყარი სხეულის როტაცია, კოსინუსის ზარი, a)-d) - წირის გასწვრივ ზუსტი vs სტანდარტული შეუღლებული vs წყაროს წევრით შეუღლებული : a) ამონახსნი, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) b) ამონახსნი, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5) c) ცდომილება, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) ცდომილება, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



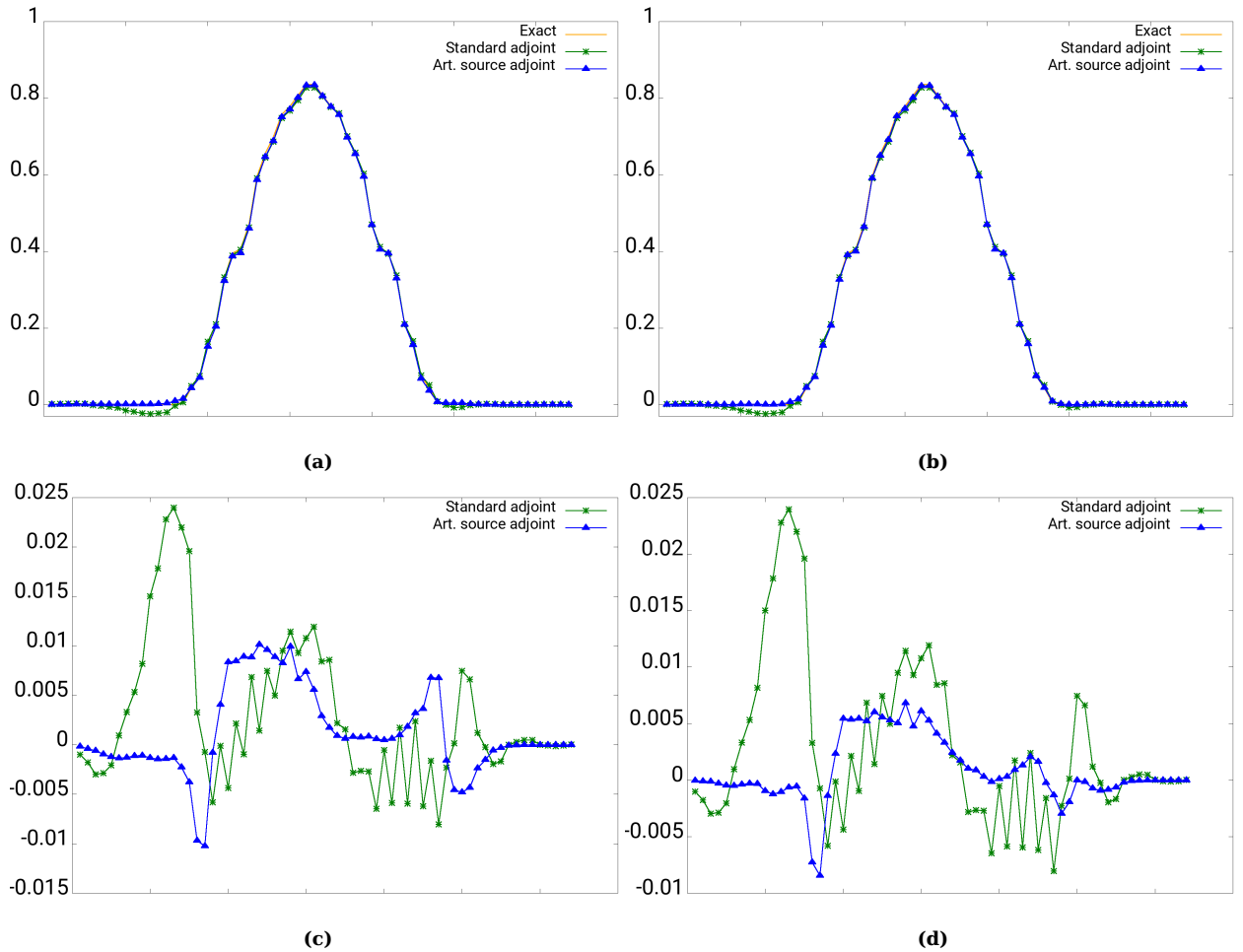
სურ 10: მყარი სხეულის როტაცია, გაჭრილი ცილინდრი: a) ზუსტი ამონახსნი b) ICON-FFSL, ლიმიტებით (3), (4) c) სტანდარტული შეუღლებული d) წყაროს წევრით შეუღლებული, ლიმიტებით (3), (4)



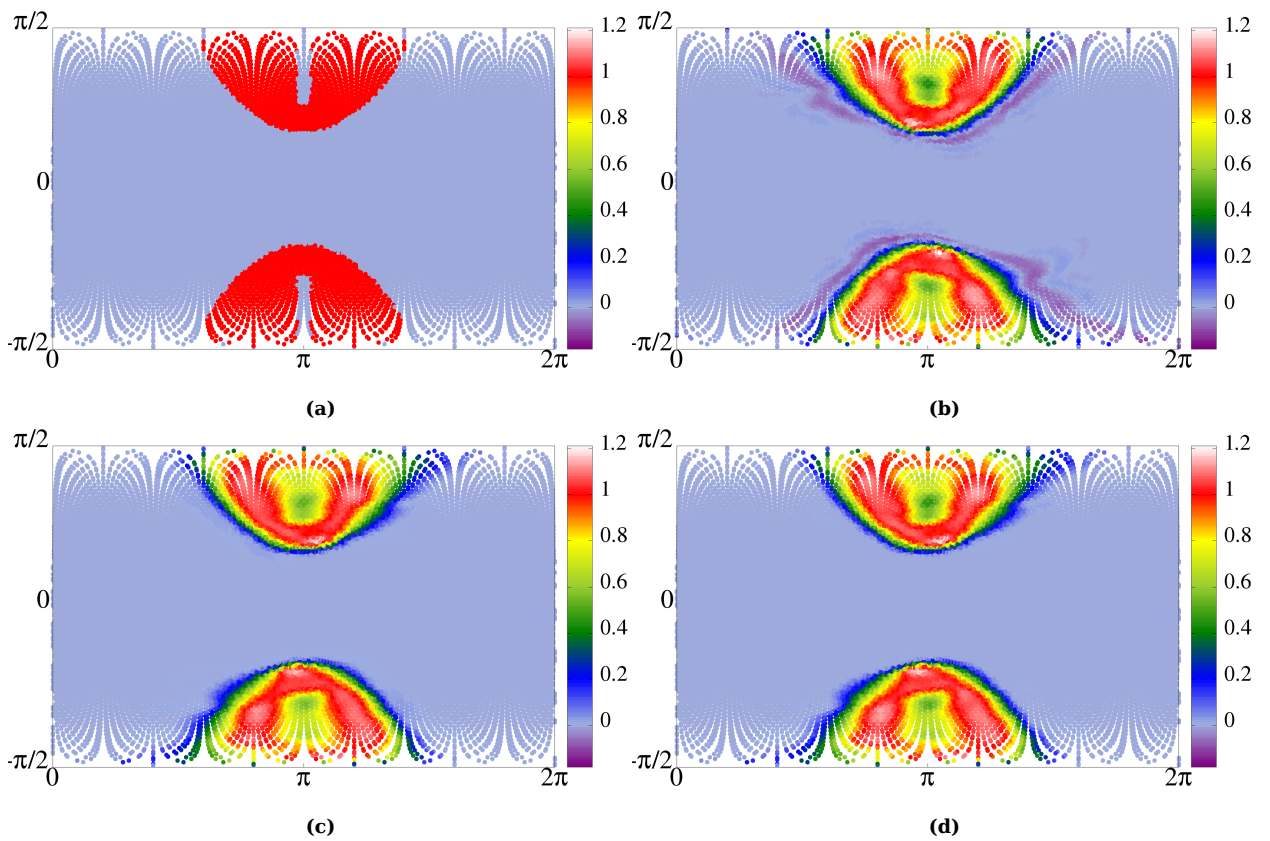
სურ 11: მყარი სხეულის როტაცია, გაჭრილი ცილნდრი, a)-d) - წირის გასწვრივ ზუსტი vs სტანდარტული შეუღლებული vs წყაროს წევრით შეუღლებული: a) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) b) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5) c) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



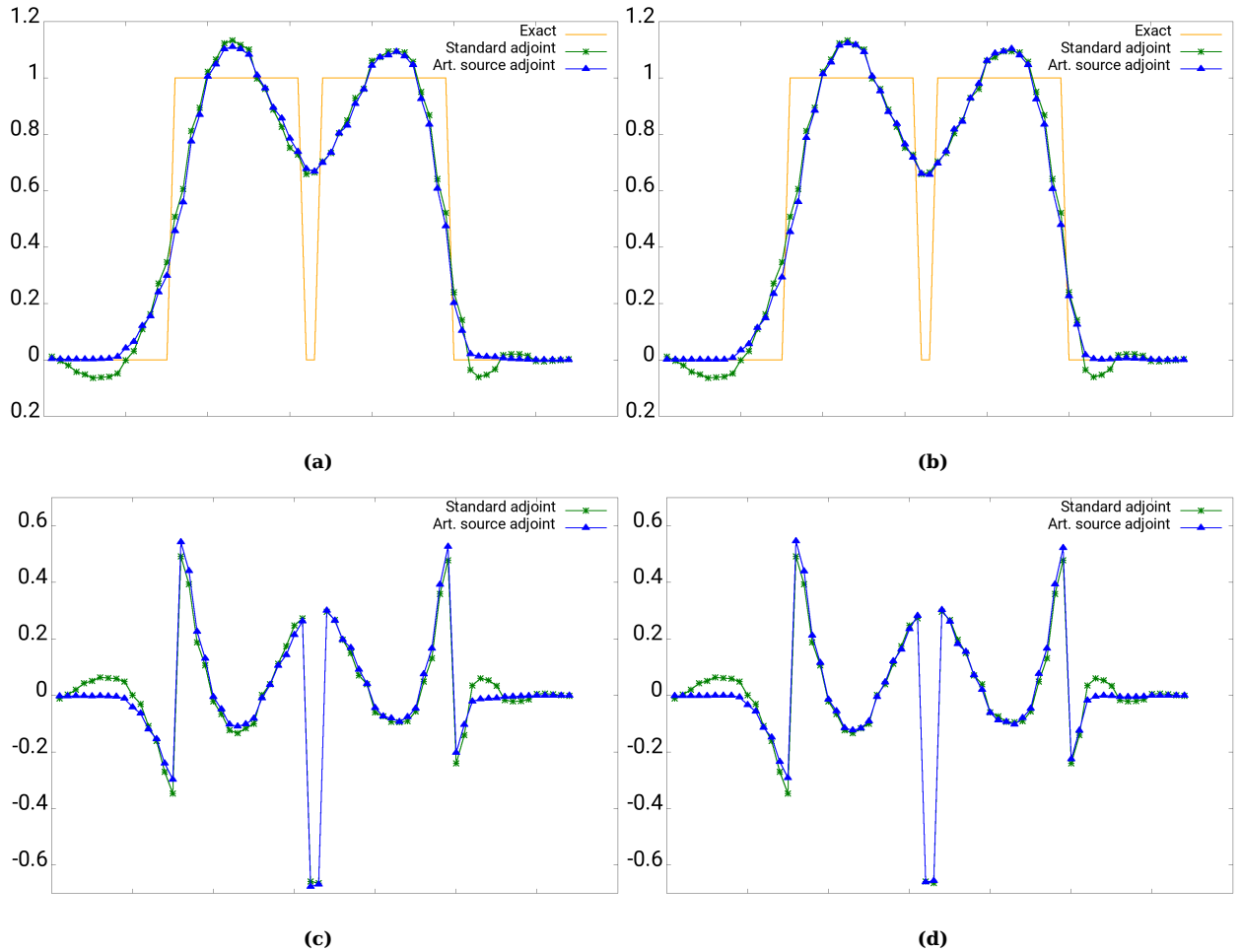
სურ 12: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} = 0$, კოსინუსის ზარები: a) ზუსტი ამონახსნი b) სტანდარტული შეუღლებული, c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



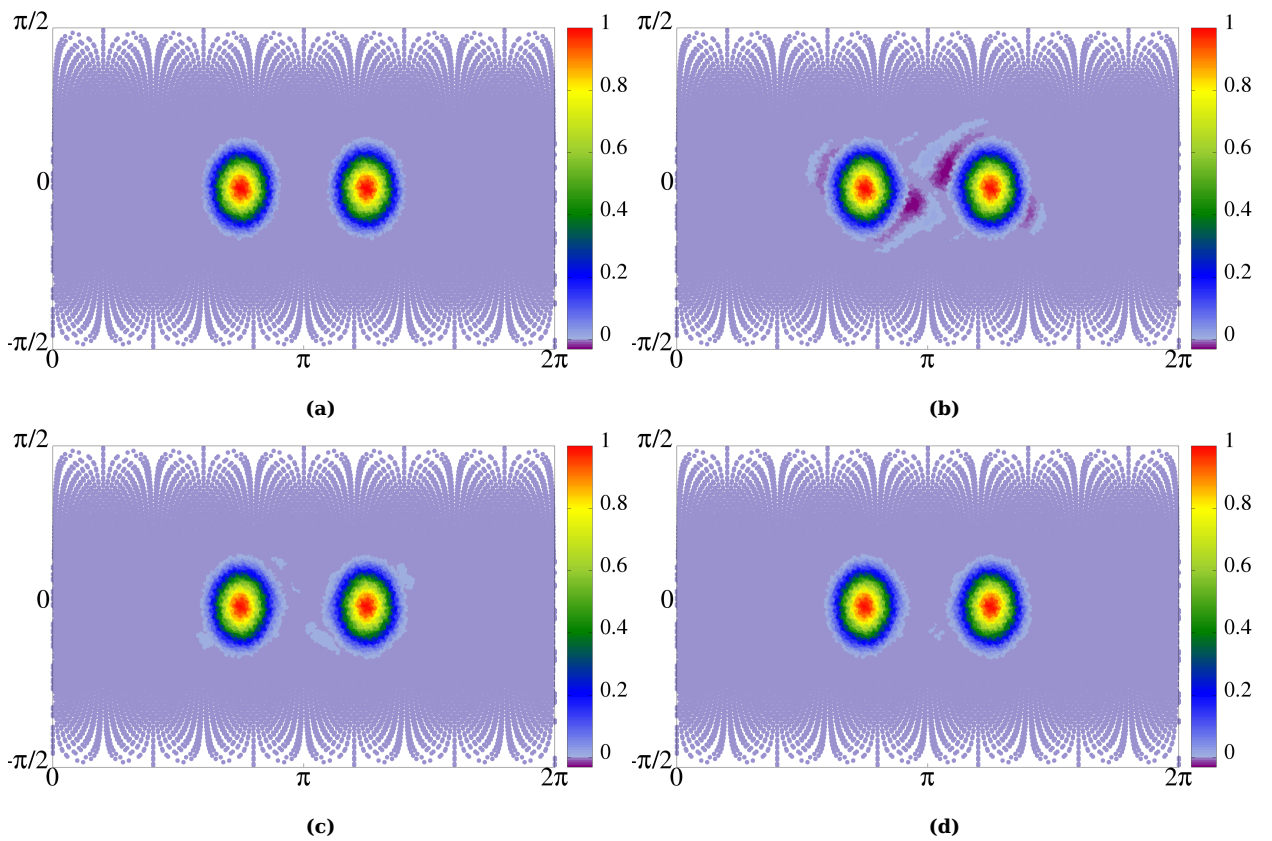
სურ 13: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} = 0$, კოსინუსის ზარები, a)-d) - წირის გასწვრივ ზუსტი vs სტანდარტული შეუღლებული vs წყაროს წევრით შეუღლებული: a) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) b) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5) c) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



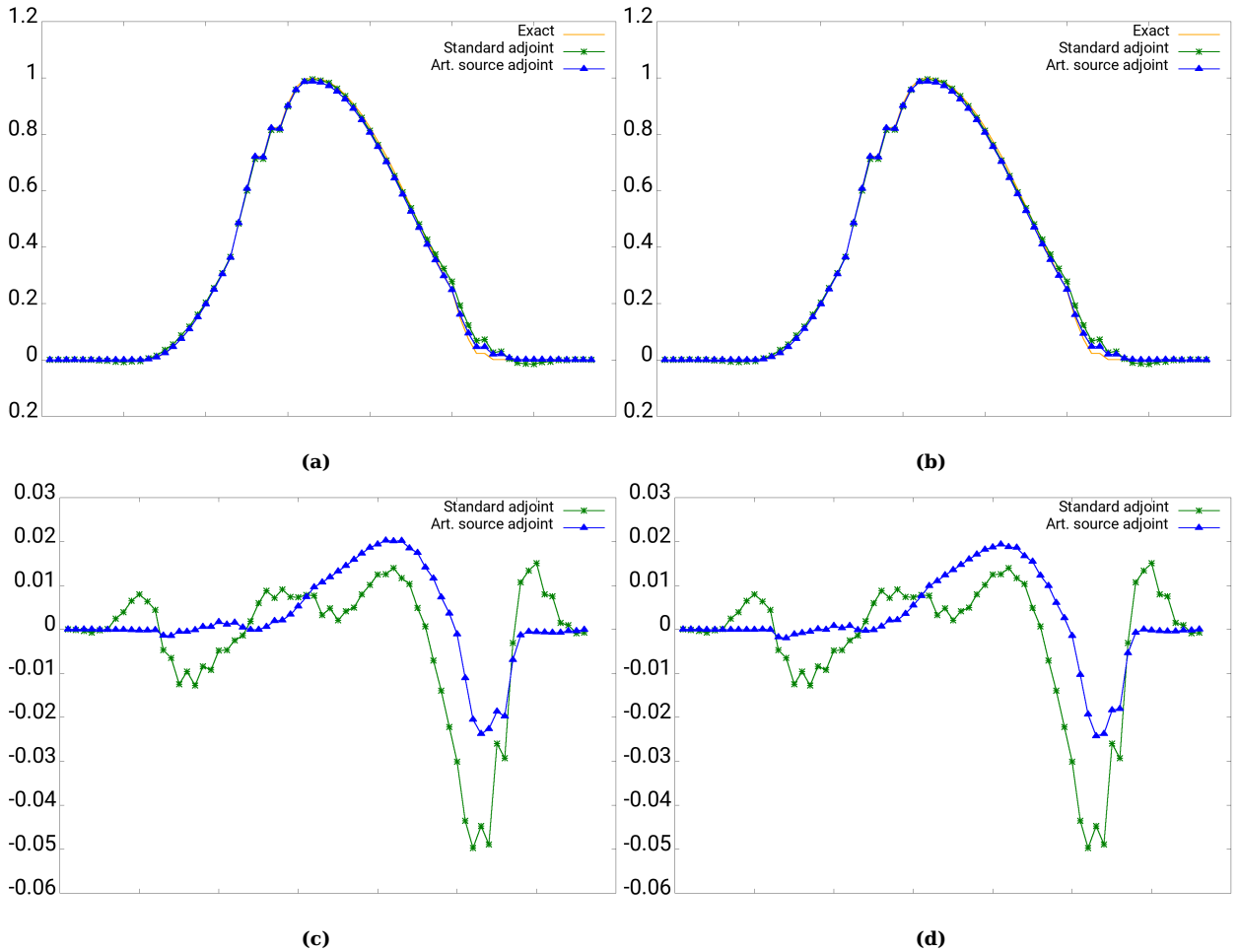
სურ 14: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} = 0$, გაჭრილი ცილინდები: a) ზუსტი ამონახსნი b) სტანდარტული შეუღლებული, c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



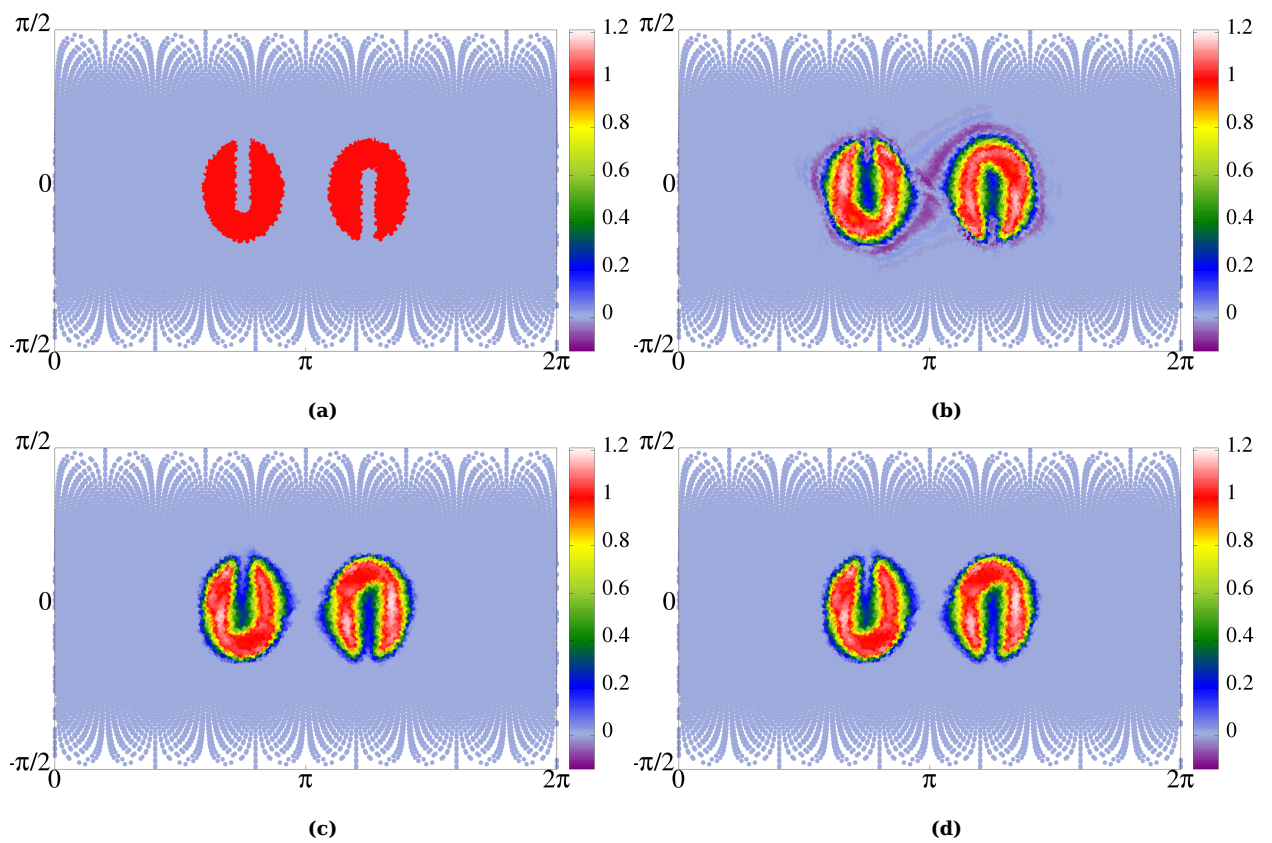
სურ 15: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} = 0$, გაჭრილი ცილინდრები, a)-d) - წირის გასწვრივ ზუსტი vs სტანდარტული შეუღლებული vs წყაროს წევრით შეუღლებული: a) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) b) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5) c) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



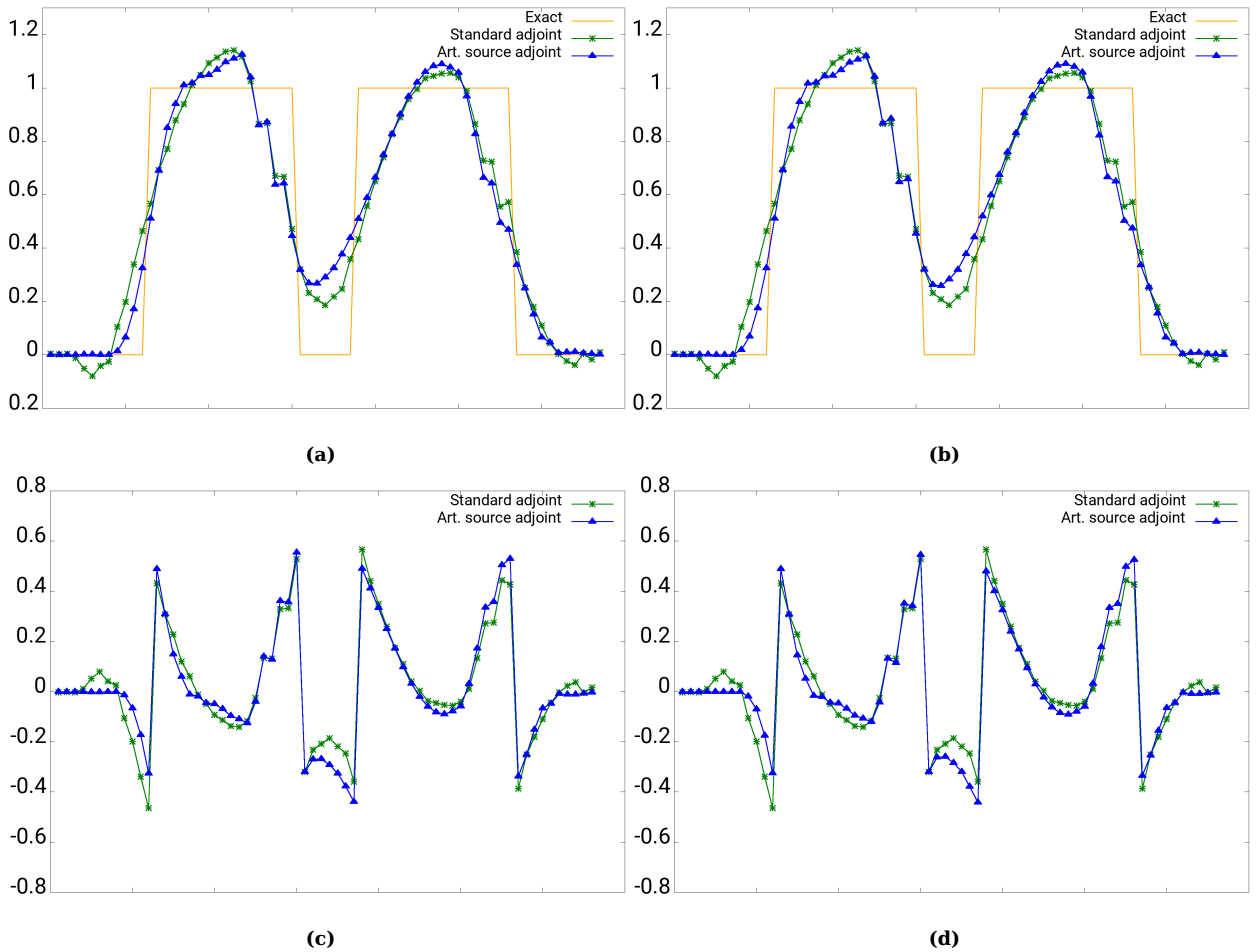
სურ 16: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$, კოსინუსის ზარები: a) ზუსტი ამონახსნი b) სტანდარტული შეუღლებული, c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



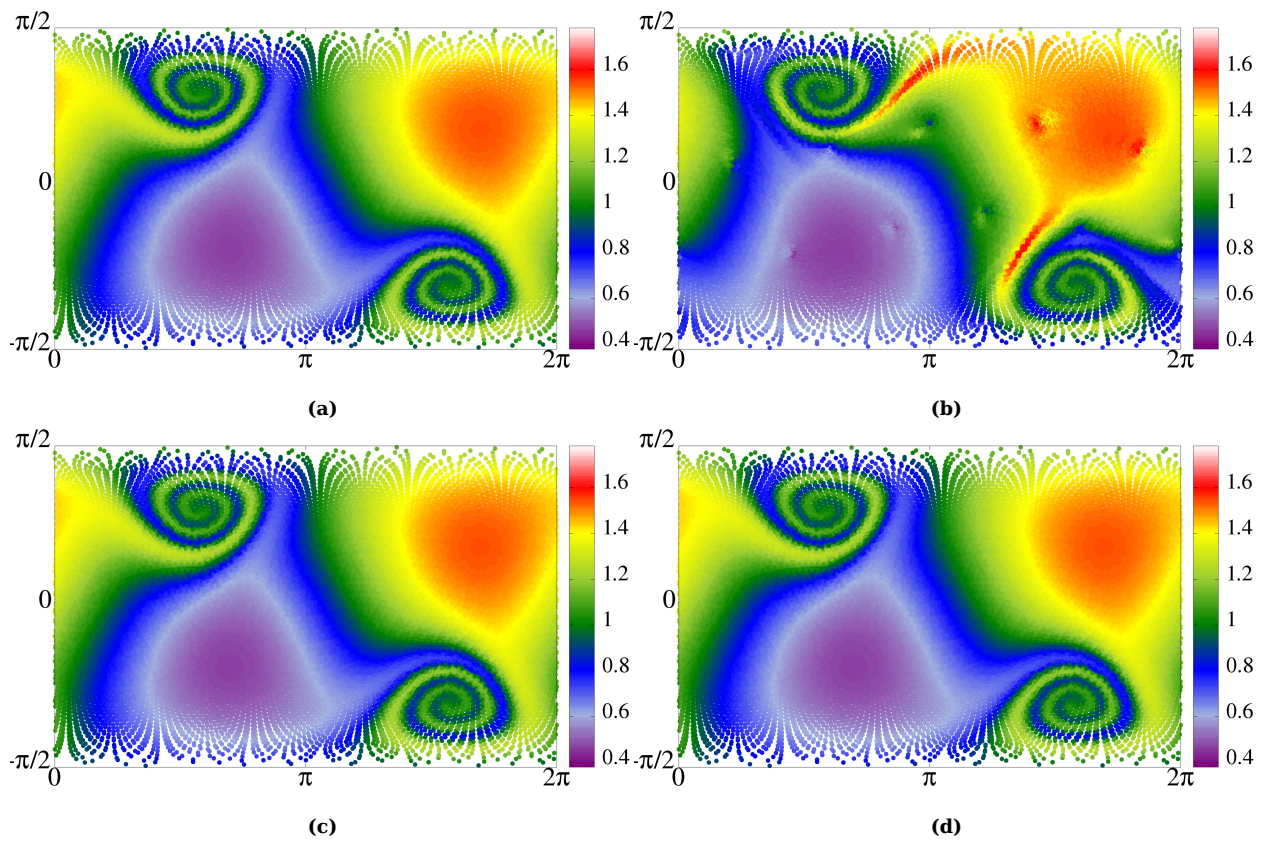
სურ 17: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$, კოსინუსის ზარები, a)-d) - წირის გასწვრივ ზუსტი vs სტანდარტული შეუღლებული vs წყაროს წევრით შეუღლებული: a) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) b) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5) c) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



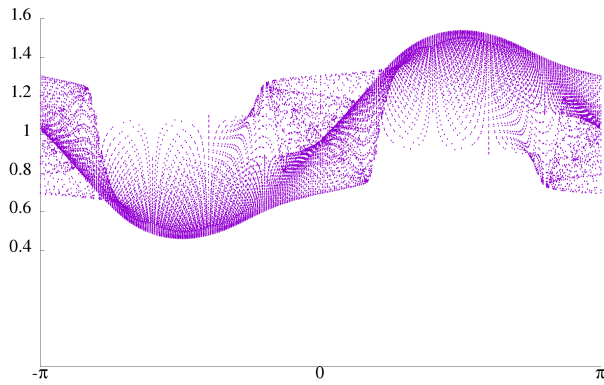
სურ 18: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$, გაჭრილი ცილინდრები: a) ზუსტი ამონახსნი b) სტანდარტული შეუღლებული, c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



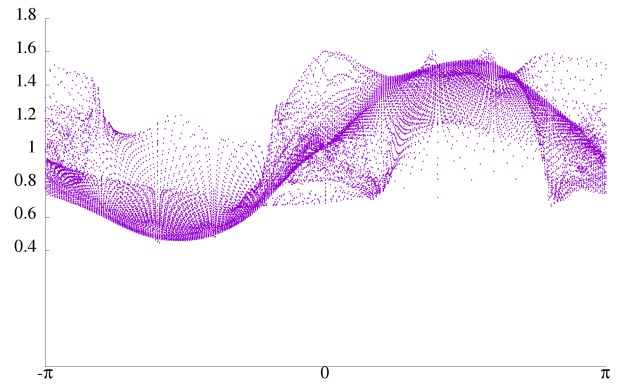
სურ 19: დეფორმაციული ნაკადი, $\nabla \vec{v} \neq 0$, გაჭრილი ცილინდრები, a)-d) - წირის გასწვრივ ზუსტი vs სტანდარტული შეუღლებული vs წყაროს წევრით შეუღლებული : a) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (4) b) ამონახსნები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (5) c) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (4) d) ცდომილებები, წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (5)



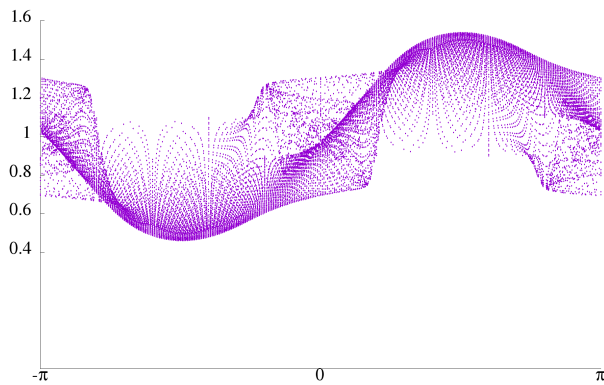
სურ 20: მოძრავი ვორტექსი: a) ზუსტი ამონახსნი, b) სტანდარტული შეუღლებული, c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (5)



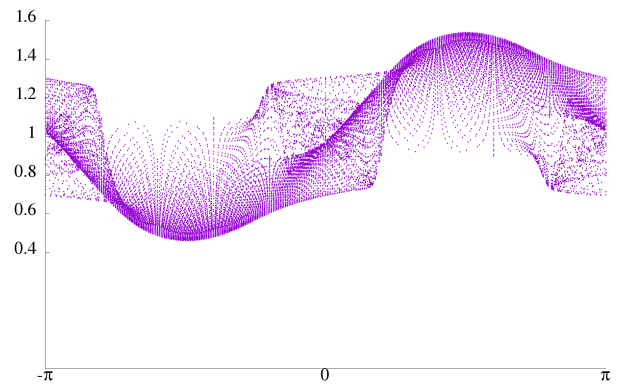
(a)



(b)

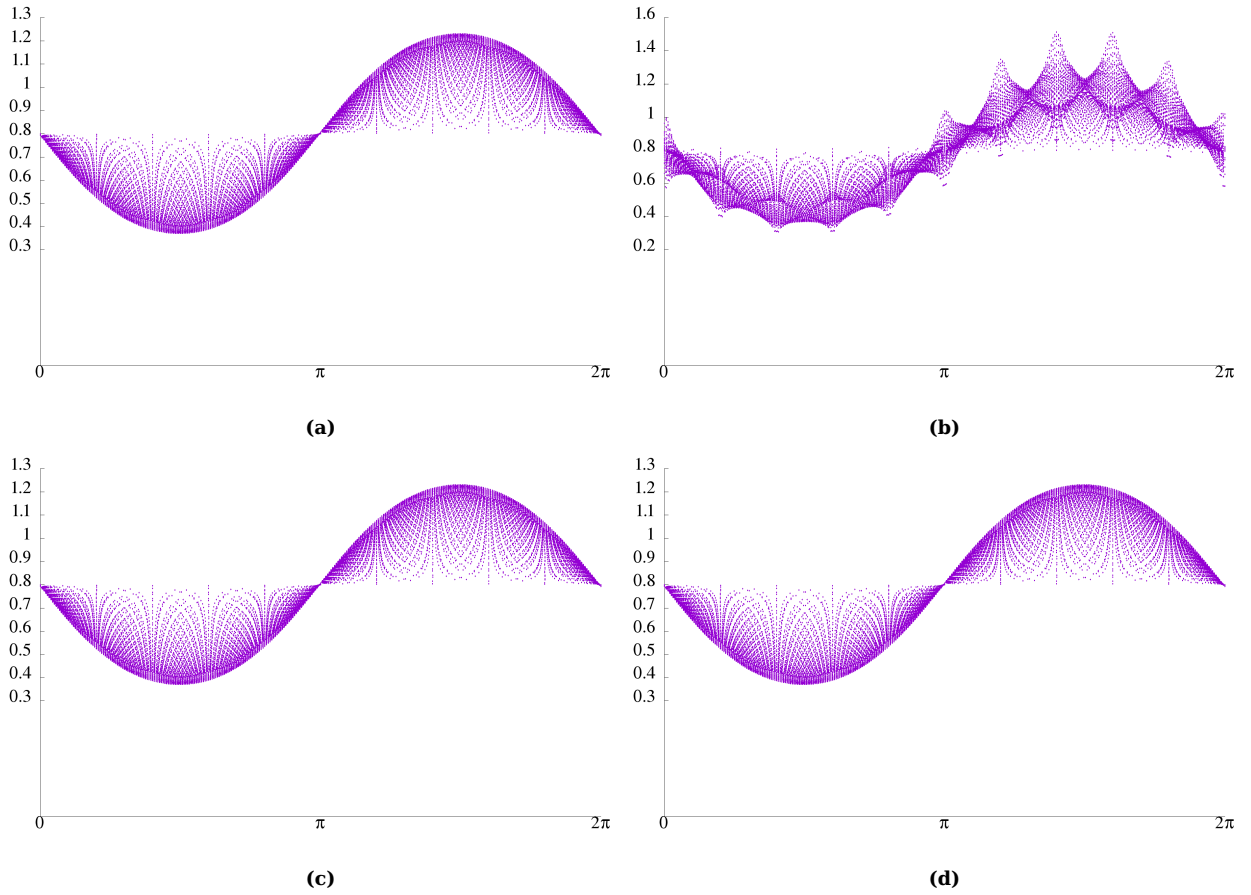


(c)



(d)

სურ 21: მოძრავი ვორტექსი, a)-d) - უძრავი ბადე $(\lambda, \theta) \in [-\pi; \pi] \times [-\pi/2; \pi/2]$, გრაფიკის ხედვის კუთხე $(90^\circ, 0^\circ)$: a) ზუსტი ამონახსნი b) სტანდარტული შეუღლებული c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტერით (3), (5)



სურ 22: მყარი სხეულის როტაციის სიხქარის ვექტორი, მოძრავი ვორტექსის საწყისი მონაცემი, a-d) - გრაფიკის ხედვის კუთხე ($90^\circ, 0^\circ$), $t = T/2$: a) ICON FFSL, ლიმიტებით (3), (4) b) სტანდარტული შეუღლებული c) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (4) d) წყაროს წევრით შეუღლებული ლიმიტებით (3), (5)

8.3 რიცხვითი შედეგები: ასიმილაციის ექსპერიმენტების ცხრილები

ცხრილი 10: ცდომილება საწყის მონაცემში ასიმილაციამდე და შემდეგ. ფუნქციონალი $J = J_o$, R2B04 ბადე, 5120 დაკვირვების წერტილი, 50 იტერაცია

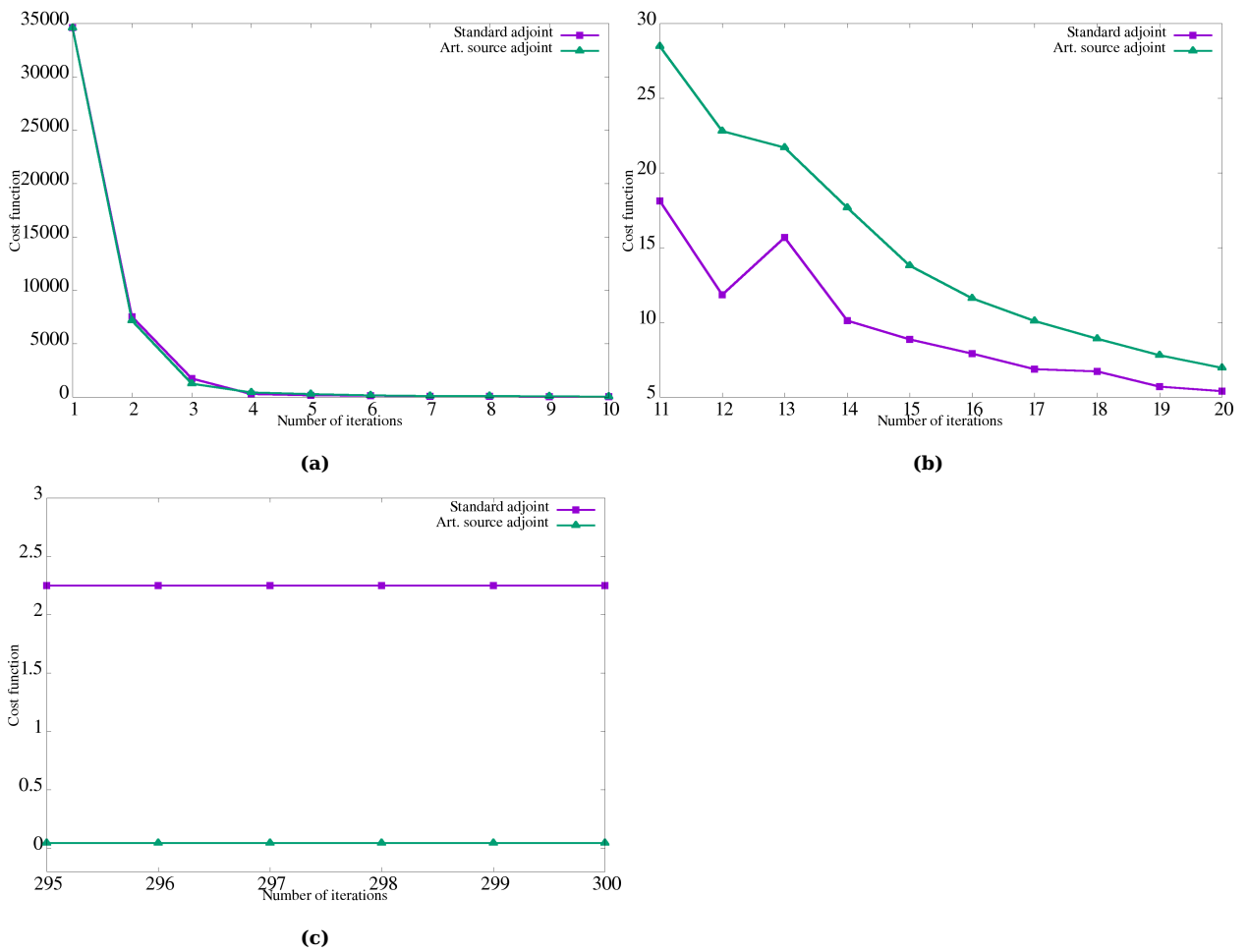
v	q_0	Error norms	Initial error	Standard adjoint	Art. source adjoint
3	4	$l_{1,rel}$	1.69E-01	1.79E-02	1.93E-02
		$l_{2,rel}$	8.39E-02	1.45E-02	1.94E-02
		$l_{\infty,rel}$	1.0E-01	1.64E-02	5.45E-02
		$l_{1,abs}$	1.27E+02	1.36E+01	1.48E+01
		$l_{2,abs}$	1.75	3.06E-01	4.14E-01
		$l_{\infty,abs}$	1.0E-01	1.64E-02	5.45E-02
3	5	$l_{1,rel}$	9.32E-02	1.42E-01	1.86E-02
		$l_{2,rel}$	7.37E-02	1.58E-01	2.0E-02
		$l_{\infty,rel}$	1.0E-01	8.7E-01	1.38E-01
		$l_{1,abs}$	1.98E+02	3.02E+02	3.98E+01
		$l_{2,abs}$	3.39	7.3	9.22E-01
		$l_{\infty,abs}$	1.0E-01	8.7E-01	1.38E-01
v	q_0	Error norms	Initial error	Art. source adjoint without limiter	Art. source adjoint
4	3	$l_{1,rel}$	1.0E-01	1.09E-03	2.4E-03
		$l_{2,rel}$	1.0E-01	3.55E-03	4.4E-03
		$l_{\infty,rel}$	1.0E-01	1.0E-01	1.99E-01
		$l_{1,abs}$	2.05E+03	2.31E+01	4.98E+01
		$l_{2,abs}$	1.5E+01	5.79E-01	7.0E-01
		$l_{\infty,abs}$	1.54E-01	1.54E-01	3.06E-01

ცხრილი 11: ბადის გაზომვების ზეგავლენა ფუნქციონალზე, 20480 დაკვირვების წერტილი, 50 იტერაცია

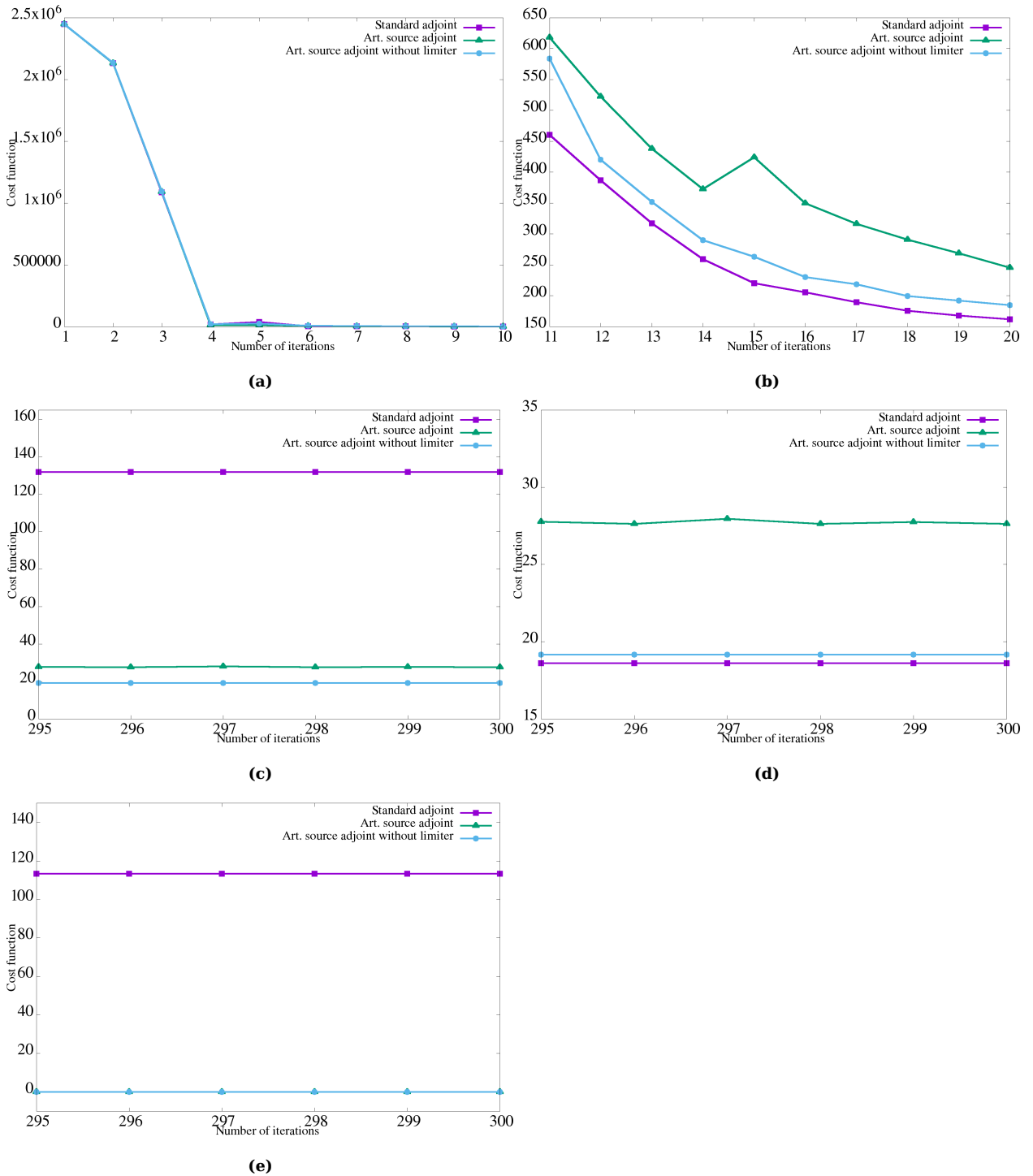
v	q_0	Grid	Cost	Art. source adjoint without limiter	Art. source adjoint with limiter		
3	4	<i>R2B4</i>	Initial	1.38305576E+05	1.382259723E+05		
			Final	5.43400710	1.568333807		
		<i>R2B5</i>	Initial	1.38485396E+05	1.384239895E+05		
			Final	7.25133893	7.422831065		
		<i>R2B6</i>	Initial	1.38514151E+05	1.384673924E+05		
			Final	6.07498723E+04	6.838604955E+01 ¹		
		<i>R2B7</i>	Initial	1.38572302E+05	1.384887423E+05		
			Final	1.38570810E+05 ¹	2.653808533E+02		
		3	5	<i>R2B4</i>	Initial	9.28758721E+05	4.88312986E+05
					Final	7.42488109E+04	1.24677839E+02
				<i>R2B5</i>	Initial	7.74514390E+05	4.98244461E+05
					Final	2.89551111E+04	2.49163938E+02
				<i>R2B6</i>	Initial	7.22016145E+05	5.02445988E+05
					Final	4.64099399E+05	6.98240016E+02
<i>R2B7</i>	Initial			1.44938992E+06	5.06102607E+05		
	Final			1.12492223E+06	1.38281501E+03		
4	3			<i>R2B4</i>	Initial	9.79289433E+06	9.79289444E+06
					Final	2.26422983E+02	2.29100238E+02
				<i>R2B5</i>	Initial	9.79276206E+06	9.79276221E+06
					Final	4.79062588E+02	2.42988014E+02
				<i>R2B6</i>	Initial	9.79280057E+06	9.79280054E+06
					Final	9.79280057E+06	3.04970940E+05
		<i>R2B7</i>	Initial	—	—		
			Final	—	—		

¹ 51 იტერაცია, ვინაიდან 50 იტერაცია იყო პირველი იტერაცია გადატვირთვის შემდეგ, სადაც $\alpha = 1$

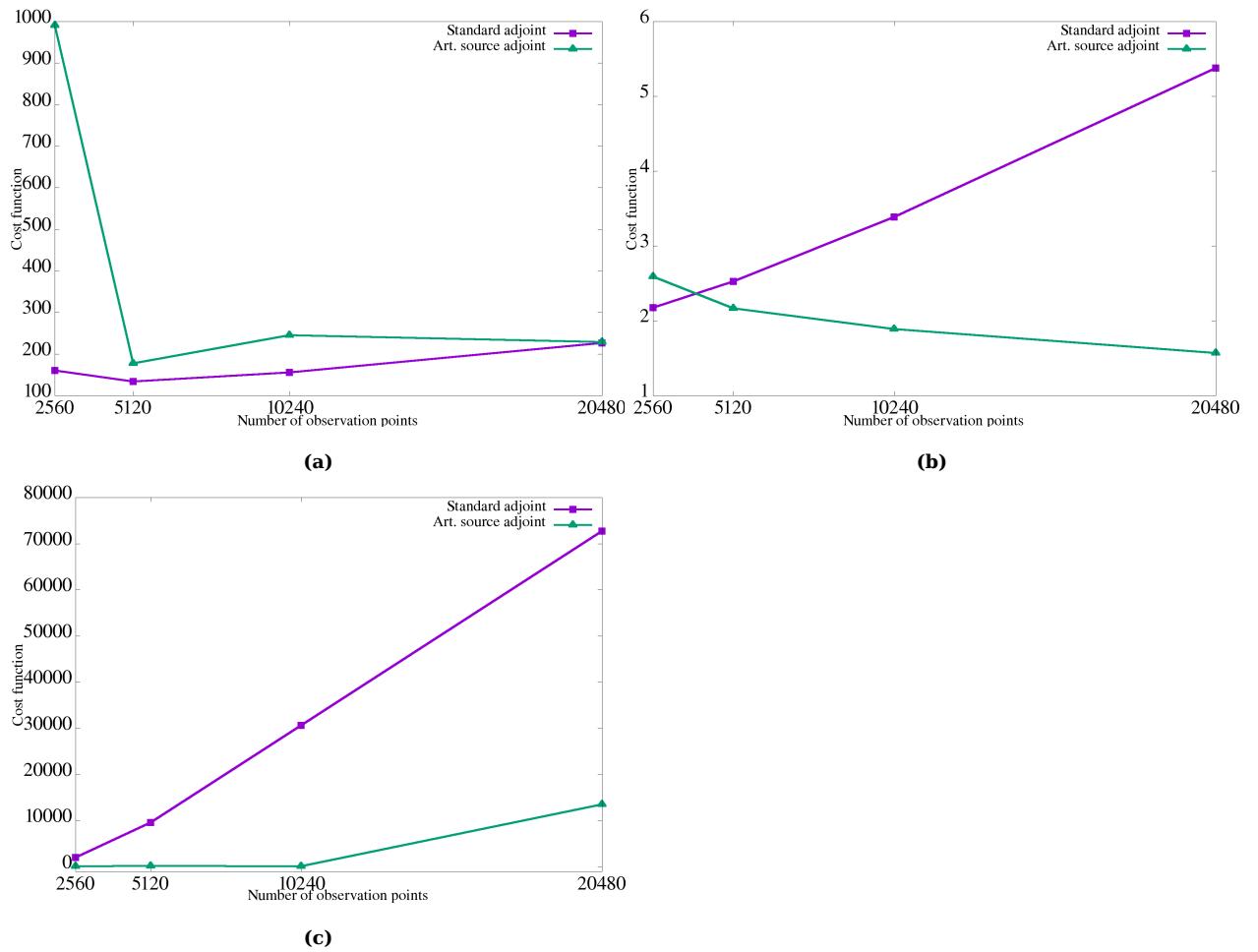
8.4 რიცხვითი შედეგები: ასიმილაციის ექსპერიმენტების გრაფიკები



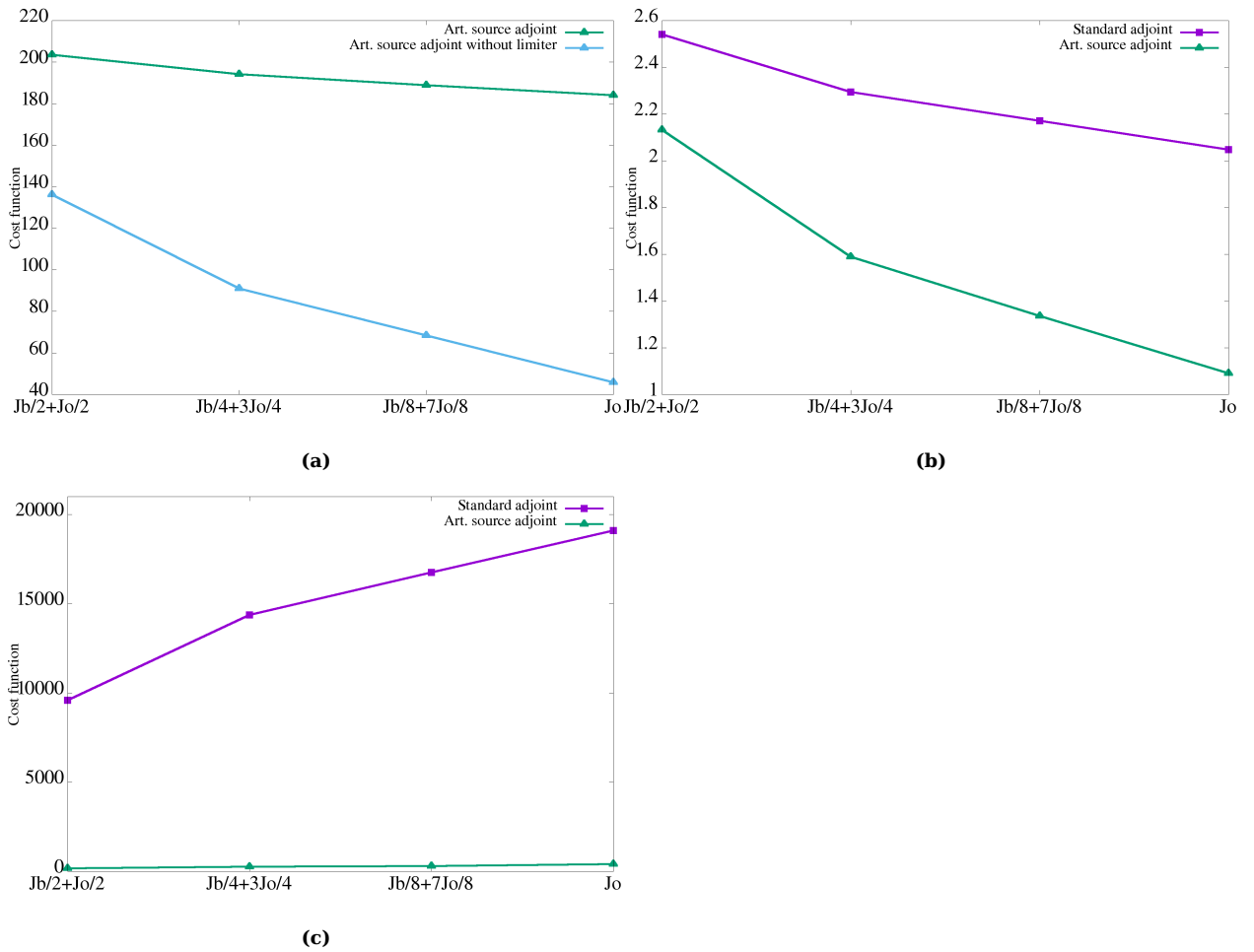
სურ 23: იტერაციების რაოდენობის ზეგავლენა, დეფორმაციული ნაკადი კონუსის ზარებისთვის, $R2B4$ ბადე, 5120 დაკვირვების წერტილი, იტერაციების რაოდენობა აბსცისათა ღერძზე, ორდინატაზე ფუნქციონალის მნიშვნელობა a) 1-10 იტერაცია b) 11-20 იტერაცია c) 295-300 იტერაცია



სურ 24: იტერაციების რაოდენობის ზეგავლენა მინიმიზაციაზე, მოძრავი ვორტექსი, *R2B4* ბადე, 5120 დაკვრების წერტილი, იტერაციების რაოდენობა აბსცისათა ღერძზე, ორდინატზე ფუნქციონალის მნიშვნელობა a) 1-10 იტერაცია b) 11-20 იტერაცია c) 295-300 იტერაცია d) ფუნქციონალის მხოლოდ ბეჭერაუნდ ნაწილი, 295-300 იტერაცია e) ფუნქციონალის მხოლოდ დაკვირვების ნაწილი, 295-300 იტერაცია



სურ 25: დაკვირვებების რაოდენობის ზეგავლენა მინიმიზაციაზე, *R2B4* ბადე, დაკვირვების წერტილების რაოდენობა აბსცისაჲა ღერძზე, ფუნქციონალის მნიშვნელობა ორდინატაზე a) მოძრავი ვორტეჲსი b) დეფორმაციული ნაკადი, კოსინუსის ჲარები c) დეფორმაციული ნაკადი, ჩაჲრული ცილინდრი



სურ 26: ბექგრაუნდისა და დაკვირვების ნაწილებზე მოდებული წონების წეგავლენა მინიმუმაციაზე, $R2B4$ ბადე, 5120 დაკვირვების წერტილი, ფუნქციონალი ბექგრაუნდისა და დაკვირვების ნაწილებზე სხვადასხვა წონების მოდებისას აბსცისათა დერძზე, ფუნქციონალის მნიშვნელობა ორდინატზე a) მოძრავი ვორტექსი b) დეფორმაციული ნაკადი, კოსინუსის ზარები c) დეფორმაციული ნაკადი, ჩაჭრილი ცილინდრი

ლიტერატურა

- [1] G. Zängl, D. Reinert, F. Prill, D. Rieger, J. Förstner, B. Vogel, ICON Model Tutorial: Working with the ICON Model, 2014.
- [2] H. Miura, An upwind-biased conservative advection scheme for spherical hexagonal-pentagonal grids, *Monthly Weather Review* 135 (12) (2007) 4038–4044. doi:10.1175/2007MWR2101.1.
- [3] S. T. Zalesak, Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids, *Journal of computational physics* 31 (3) (1979) 335–362. doi:10.1016/0021-9991(79)90051-2.
- [4] C. Schär, P. K. Smolarkiewicz, A synchronous and iterative flux-correction formalism for coupled transport equations, *Journal of Computational Physics* 128 (1) (1996) 101–120. doi:10.1006/jcph.1996.0198.
- [5] L. M. Harris, P. H. Lauritzen, R. Mittal, A flux-form version of the conservative semi-lagrangian multi-tracer transport scheme (cslam) on the cubed sphere grid, *Journal of Computational Physics* 230 (4) (2011) 1215–1237. doi:10.1016/j.jcp.2010.11.001.
- [6] T. Vukićević, M. Steyskal, M. Hecht, Properties of advection algorithms in the context of variational data assimilation, *Monthly Weather Review* 129 (5) (2001) 1221–1231. doi:10.1175/1520-0493(2001)129<1221:P0AAIT>2.0.CO;2.
- [7] J. Thuburn, T. W. Haine, *Nonoscillatory Advection Schemes with Well-Behaved Adjoints*, 2001. doi:10.1007/978-94-010-0792-4_36.

- [8] F.-X. Le Dimet, O. Talagrand, Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects, *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography* 38 (2) (1986) 97-110. doi:10.3402/tellusa.v38i2.11706.
- [9] M. Nodet, A. Vidard, Variational methods, *Handbook of Uncertainty Quantification* (2016) 1-20doi:10.1007/978-3-319-11259-6_32-1.
- [10] J. Thuburn, T. W. Haine, Adjoints of nonoscillatory advection schemes, *Journal of Computational Physics* 171 (2) (2001) 616-631. doi:10.1006/jcph.2001.6799.
- [11] P. H. Lauritzen, R. D. Nair, P. A. Ullrich, A conservative semi-lagrangian multi-tracer transport scheme (cslam) on the cubed-sphere grid, *Journal of Computational Physics* 229 (5) (2010) 1401-1424.
- [12] W. C. Skamarock, M. Menchaca, Conservative transport schemes for spherical geodesic grids: High-order reconstructions for forward-in-time schemes, *Monthly Weather Review* 138 (12) (2010) 4497-4508.
- [13] P. Colella, P. R. Woodward, The piecewise parabolic method (ppm) for gas-dynamical simulations, *Journal of computational physics* 54 (1) (1984) 174-201.
- [14] P. Courtier, J.-N. Thépaut, A. Hollingsworth, A strategy for operational implementation of 4d-var, using an incremental approach, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 120 (519) (1994) 1367-1387.

- [15] H. Elbern, A. Strunk, H. Schmidt, O. Talagrand, Emission rate and chemical state estimation by 4-dimensional variational inversion, *Atmospheric Chemistry and Physics* 7 (14) (2007) 3749–3769.
- [16] A. Weaver, P. Courtier, Correlation modelling on the sphere using a generalized diffusion equation, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 127 (575) (2001) 1815–1846.
- [17] H. Wan, Developing and testing a hydrostatic atmospheric dynamical core on triangular grids (01 2009).
- [18] C. Ollivier-Gooch, M. Van Altena, A high-order-accurate unstructured mesh finite-volume scheme for the advection-diffusion equation, *Journal of Computational Physics* 181 (2) (2002) 729–752.
- [19] R. D. Nair, C. Jablonowski, Moving vortices on the sphere: A test case for horizontal advection problems, *Monthly Weather Review* 136 (2) (2008) 699–711.
- [20] R. D. Nair, P. H. Lauritzen, A class of deformational flow test cases for linear transport problems on the sphere, *Journal of Computational Physics* 229 (23) (2010) 8868–8887.
- [21] R. D. Nair, B. Machenhauer, The mass-conservative cell-integrated semi-lagrangian advection scheme on the sphere, *Monthly Weather Review* 130 (3) (2002) 649–667. doi:10.1175/1520-0493(2002)130<0649:TMCCIS>2.0.CO;2.
- [22] D. L. Williamson, J. B. Drake, J. J. Hack, R. Jakob, P. N. Swarztrauber, A standard test set for numerical approximations to the shallow water equations in spherical geometry, *Journal of Computational*

- Physics 102 (1) (1992) 211-224. doi:10.1016/S0021-9991(05)80016-6.
- [23] D. C. Liu, J. Nocedal, On the limited memory bfgs method for large scale optimization, *Mathematical programming* 45 (1-3) (1989) 503-528. doi:10.1007/BF01589116.
- [24] K.-Y. Wang, D. Lary, D. Shallcross, S. Hall, J. Pyle, A review on the use of the adjoint method in four-dimensional atmospheric-chemistry data assimilation, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 127 (576) (2001) 2181-2204. doi:10.1002/qj.49712757616.
- [25] A. Sandu, T. Chai, Chemical data assimilation — An overview, *Atmosphere* 2 (3) (2011) 426-463. doi:10.3390/atmos2030426.
- [26] H. Elbern, H. Schmidt, A. Ebel, Variational data assimilation for tropospheric chemistry modeling, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 102 (D13) (1997) 15967-15985. doi:10.1029/97JD01213.
- [27] H. Elbern, H. Schmidt, A four-dimensional variational chemistry data assimilation scheme for eulerian chemistry transport modeling, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 104 (D15) (1999) 18583-18598. doi:10.1029/1999JD900280.
- [28] H. Elbern, J. Schwinger, R. Botchorishvili, Chemical state estimation for the middle atmosphere by four-dimensional variational data assimilation: System configuration, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 115 (D6) (2010). doi:10.1029/2009JD011953.