ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციათა სივრცეების შესახებ

ანი ოზბეთელაშვილი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: ასისტ. პროფ. შალვა ზვიადაძე

თბილისი 2020

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომი კვლევითი ხასიათისაა და მასში შემოღებულია ვინერის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასის განზოგადება, როდესაც ექსპონენტა არამუდმივი ფუნქციაა.

ნაჩვენებია, რომ აღნიშნული კლასის განსაზღვრა ხერხდება მაშინაც კი, როდესაც ექსპონენტა არსებითად შემოუსაზღვრელი ფუნქციაა, განსხვავებით კასტილოს, მორიენტესისა და რაფიეროს შემოღებული ანალოგიური კლასისგან ცვლადი მაჩვენებლით, რომელიც განისაზღვრება, მხოლოდ შემოსაზღვრული ექსპონენტებისთვის. აგრეთვე ნაჩვენებია, რომ ახალი კლასი სიმრავლურად უფრო მცირე არ არის კასტილოს, მორიენტესისა და რაფიეროს კლასზე, ამასთან აგებულია შემოსაზღვრული ექსპონენტა, რომლისთვისაც კასტილოს მორიენტესისა და რაფიეროს კლასი საკუთრივი ქვესიმრავლეა ახლად განსაზღვრული ფუნქციათა კლასის.

ნაჩვენებია, რომ აღნიშნული კლასი არ წარმოადგენს ბანახის ფუნქციურ სივრცეს ბენეტისა და შარპლის აზრით. აგრეთვე დადგენილია ახალი შემოღებული კლასის ზოგიერთი საინტერესო თვისება.

1 შესავალი

კამილ ჟორდანმა 1881 წელს შემოიღო სასრული ვარიაციის ფუნქციის ცნება, როდესაც იკვლევდა ფურიეს მწკრივების კრებადობის საკითხებს. მოგვიანებით ეს ცნება განაზოგადეს სხვადასხვა მიმართულებით ფ. რისმა, ნ. ვინერმა, რ. ლოვმა, ჰ. ურსელმა, ლ. იუნგმა, ვ. ორლიჩმა, მუსიელაკმა, ტონელიმ, ჩეზარიმ, კაჩოპოლიმ, კიტამ, იონედამ და მრავალმა სხვამ. ამ მიმართულებით მუშაობდნენ ქართველი მეცნიერებიც ახობაძე, ჭანტურია, გოგინავა, ქარჩავა და სხვანი.

აღსანიშნავია, რომ ამ განზოგადებებიდან მრავალი მოტივირებული იყო ამოცანებით ისეთი მიმართულებებიდან, როგორიცაა ვარიაციული აღრიცხვა, ფურიეს მწკრივთა კრებადობის საკითხები, ზომის გეომეტრიული თეორია, მათ. ფიზიკა და სხვა დარგები. ამგვარად, აღნიშნულმა განზოგადებებმა მათემატიკის სხვადასხვა მიმართულებებში ჰპოვეს მრავალი გამოყენება. შესაბამისად, განზოგადებული სასრული ვარიაციის ფუნქციებისა და ფუნქციათა კლასების შესწავლა მნიშვნელოვანი მიმართულებაა მათემატიკურ ანალიზში.

1924 წელს ვინერმა განაზოგადა ჟორდანის ცნება და შემოიღო p ვარიაციის ცნება. ვინერის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია წარმოადგენს ჟორდანის შემოღებული ცნების ერთ-ერთ ზემოთ თქმულ განზოგადებას. იგი ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი და ადრეულია სხვა განზოგადებებს შორის. ჩვენ ნაშრომში შევეხებით სწორედ ვინერის ცნების განზოგადებას.

ბოლო ხანს ცხადი გახდა, რომ კლასიკურ ფუნქციურ სივრცეებს აღარ ძალუძთ ამოხსნა მთელი რიგი პრობლემების, რომლებიც ბუნებრივად ჩნდება არაწრფივი დრეკადობის თეორიის, სითხეთა დინების მექანიკისა და სხვადასხვა ფიზიკური მოვლენების მათემატიკურ მოდელებში არსებული კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნადობის საკითხების გამოკვლევისას. ამ გარემოებამ განაპირობა ახალი, არასტანდარტული ბანახის ფუნქციური სივრცეების შემოღება და მათი ინტენსიური გამოკვლევა. ერთ-ერთ ასეთ ფუნქციურ სივრცეს წარმოადგენს ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე.

ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცე შემოღებული იყო ჯერ კიდევ გასული საუკუნის 30-წლებში ვ. ორლიჩის მიერ. თავდაპირველად მათი შემოღება განპირობებული იყო თეორიული მოსაზრებებით, მაგრამ გასული საუკუნისა და ამ საუკუნის მიჯნაზე ინტერესი აღნიშნული სივრცეების მიმართ გაძლიერდა, ვინაიდან, უკანასკნელ წლებში გამოიკვეთა აღნიშნული სივრცეების გამოკვლევის არსებითი აუცილებლობა მრავალ გამოყენებით ამოცანაში.

გამოყენების არეალიდან აღსანიშნავია ელექტრორეოლოგიური სითხეების მათემატიკური მოდელი. ელექტრორეოლოგიური სითხეები ეს ისეთი სითხეებია, რომელთა სიბლანტე იცვლება (ხშრად მკვეთრად) ელექტრული ველის ზემოქმედებით. მიუხედავად იმისა, რომ ამგვარი სითხეები ექსპერიმენტების გზით საკმაოდ შესწავლილია სრული თეორიული მოდელი კვლავინდებურად არ არსებობს. სითხეთა დინამიკაში ამგვარ სითხეებს მოიხსენიებენ, როგორც არა-

ნიუტონისეულ სითხეებს. ზემოაღნიშნულის გარდა, ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეები გამოიყენება სხვა ფიზიკური მოვლენების აღმწერ მათემატიკურ მოდლებშიც. მაგალითად: კვაზი-ნიუტონისეული სითხეების, თერმისტორის (თერმო რეზისტორის) პრობლემის, ფოროვან გარემოში სითხეთა მოძრაობისა და მაგნიტოსტატიკის მათემატიკურ მოდელებში. ცვლადმაჩვენებლიან სივრცეებს იყენებენ გამოსახულების აღდგენის ამოცანაშიც.

კასტილიომ, მორიენტესმა და რაფეირომ [2] ნაშრომში შემოიღეს ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიაციის ფუნქციის ცნება და შესაბამის ფუციათა $BV^{p(\cdot)}$ სივრცე.

ნაშრომში ჩვენ შემოვიღებთ ცვლადმაჩვენებლიან ვარიაციას განსხვავებული სახით, რაც საშუალებას მოგვცემს, განვსაზღვროთ ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიაციის ფუნქციათა სივრცე $WBV_{p(\cdot)}$ ექსპონენტა ფუნქციების უფრო ფართო კლასისთვის, ვიდრე ეს შესაძლებელია კასტილოს, მორიენტესისა და რაფეიროს განსაზღვრების შემთხვევაში. აგრეთვე ნაშრომში მოვიყვანთ ახალგანსაზღვრული ფუნქციათა კლასის სხვადასხვა მახასიათებლებს, როგორც ფუნქციონალური ანალიზის თვალსაზრისით, ასევე ფუნქციათა თეორიის კუთხით.

2 ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიაციის ფუნქციათა $BV^{p(\cdot)}$ სივრცე

ამ პარაგრაფში მოვიყვანთ ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიაციის ქუნქციათა $BV^{p(\cdot)}$ სივრცის განსაზღვრებას, რომელიც შემოიღეს კასტილომ, მორიენტესმა და რაფეირომ. ამასთან მოვიყვანთ მათ მიღებულ ზოგიერთ შედეგს აღნიშნულ კლასთან დაკავშირებით. ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიაციის ფუნქციათა კლასის განსაზღვრისთვის დაგჭირდება გარკვეული ცნებებისა და დებულებების ჩამოყალიბება, რომელნიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ აგრეთვე ჩვენს ნაშრომშიც.

2.1 ფსევდომოდულარი და მოდულარული სივრცე

ვთქვათ X არის წრფივი სივრცე, რაიმე $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ან $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ველის მიმართ. ქვემოდან ამოზნექილ და მარცხნიდან უწყვეტ ფუნქციონალს $\rho : X \to [0; +\infty]$ ვუწოდებთ ამოზნექილ ფსევდომოდულარს თუ ყოველი $x, y \in X$ ვექტორებისთვის სრულდება შემდეგი პირობები:

(i) $\rho(0_X) = 0$;

(ii) ყოველი $\alpha \in \mathbb{K}$, ველის ელემენტისთვის, რომლისთვისაც $|\alpha| = 1$ გვაქვს $\rho(\alpha x) = \rho(x)$;

(iii) ყოველი $\alpha \in [0; 1]$ რიცხვისთვის გვაქვს $\rho(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\rho(x) + (1-\alpha)\rho(y)$.

თუ ρ ფსევდომოდულარია X წრფივ სივრცეზე, მაშინ

$$X_\rho := \left\{ x \in X \ : \ \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0 \right\}$$

სიმრავლეს უწოდებენ მოდულარულ სივრცეს. თუ ρ ამოზნექილი ფსევდომოდულარია, მაშინ X_ρ მოდულარულ სივრცეზე შესაძლებელია ე.წ. ლუქსემბურგის ნორმის შემოღება:

$$||x||_{X_\rho} := \inf \left\{ \lambda > 0 \ : \ \rho(x/\lambda) \leq 1 \right\}.$$

შემდეგი დებულება ამყარებს კავშირს მოდულარსა და ნორმას შორის მოდულარულ X_ρ სივრცეზე.

წინადადება 1. *ვთქვათ X წრფივი სივრცეა, ρ ნახევარმოდულარი X-ზე და $f \in X$, მაშინ*

(i) $\rho(f) \leq 1$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $||f||_{X_\rho} \leq 1$;

(ii) თუ $||f||_{X_\rho} \leq 1$, მაშინ $\rho(f) \leq ||f||_{X_\rho}$;

(iii) თუ $||f||_{X_\rho} > 1$, მაშინ $\rho(f) \geq ||f||_{X_\rho}$;

(iv) ყოველი $f \in X$ ელემენტისთვის გვაქვს $||f||_{X_\rho} \leq \rho(f) + 1$.

2.2 $BV^{p(\cdot)}$ სივრცის განსაზღვრა

დავუშვათ, მოცემულია $[a;b]$ სეგმენტი და $\Pi_{[a;b]} = \{a = t_0, t_1 < \cdots < t_n = b\}$ აღნიშნავს $[a;b]$ სეგმენტის ყველა სასრულ დანაწილებათა სიმრავლეს.

განსაზღვრება 1. განვსაზღვროთ ფუნქციონალი

$$\rho_{(a;b)}(f) := V_{[a;b]}^{p(\cdot)}(f) = \sup_{\Pi^*_{[a;b]}} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})},$$

სადაც $\Pi^*_{[a;b]}$ $[a;b]$ სეგმენტის სასრულ დანაწილებათა სიმრავლეა $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ შერჩეული წერტილებით ისეთი, რომ ყოველი i რიცხვისთვის $t_i \leq x_i \leq t_{i+1}$.

განსაზღვრება 2. ექსპონენტა $p : [a;b] \to (1; +\infty)$ ფუნქციას ვუწოდებთ დასაშვებს, თუ

$$p^+ := \sup_{x \in [a;b]} p(x) < +\infty.$$

სამართლიანია შემდეგი

წინადადება 2. *დავუშვათ p არის დასაშვები ფუნქცია, მაშინ $V_{[a;b]}^{p(\cdot)}$ არის ამოზნექილი ფსევდომოდულარი.*

დამტკიცება. მართლაც, $\rho(0) = 0$, უფრო მეტიც $\rho(f) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f = const$. თვისება $\rho(\alpha f) = \rho(f)$ ტრივიალურად გამომდინარეობს განსაზღვრებიდან. ვაჩვენოთ ამოზნექილობა. ვინაიდან, $t \to t^p$ ასახვა ამოზნექილია ქვემოდან, როცა $p \geq 1$, მაშინ ყოველი $\alpha \in [0;1]$ რიცხვისთვის გვაქვს

$$|\alpha(f(t_i) - f(t_{i-1})) + (1-\alpha)(g(t_i) - g(t_{i-1}))|^{p(x_{i-1})} \leq$$
$$\leq \alpha|f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})} + (1-\alpha)|g(t_i) - g(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}.$$

ცხადია, ეს უტოლობა მართებულია $V_{[a;b]}^{p(\cdot)}$-ის განსაზღვრებაში მოყვანილი ყოველი დანაწილების შესაბამისი ჯამის ყოველი შესაკრებისთვის და შესაბამისად მივიღებთ $V_{[a;b]}^{p(\cdot)}(\alpha f + (1-\alpha)g) \leq \alpha V_{[a;b]}^{p(\cdot)}(f) + (1-\alpha)V_{[a;b]}^{p(\cdot)}(g)$. ■

მას შემდეგ, რაც ვაჩვენეთ, რომ $V_{[a;b]}^{p(\cdot)}$ ამოზნექილი ფსევდომოდულარია, მისი საშუალებით შეგვიძლია, შემოვიღოთ ნორმა და შესაბამისად განვსაზღვროთ ცვლადმაჩვენებლიანი ნორმირებული სივრცე.

განსაზღვრება 3. განვსაზღვროთ ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიაციის ფუნქციათა სივრცე შემდეგი გამოსახულებით

$$BV^{p(\cdot)} := \{f : [a;b] \to \mathbb{R} \; : \; f(a) = 0, \; ||f||_{BV^{p(\cdot)}} < +\infty\},$$

სადაც

$$||f||_{BV^{p(\cdot)}} := \inf\left\{\lambda > 0 \; : \; V_{[a;b]}^{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \tag{1}$$

არის ამოზნექილი ფსევდომოდულარით შემოღებული ლუქსემბურგის ნორმა.

შენიშვნა 1. პირობა $f(a) = 0$ დამატებულია იმისთვის, რომ ნორმა ნული იყოს მხოლოდ იგივურად ნულის ტოლი ფუნქციისთვის და არა ყველა მუდმივი ფუნქციისთვის. ცხადია, იმავეს მიღწევა შეიძლებოდა, თუ მიღებულ ნორმას მივუმატებდით $f(a)$ სიდიდეს ან ფუნქციის სუპრემუმს, მაგრამ ეს გარემოება ფუნქციათა კლასს სტრუქტურულად არ შეცვლიდა.

ფუნქციათა $BV^{p(\cdot)}$ სივრცესთან დაკავშირებით [2] ავტორებმა მიიღეს რამდენიმე შედეგი, მათ შორის დამტკიცებულია, რომ დასაშვები მაჩვენებლისთვის $BV^{p(\cdot)}$ სივრცე ბანახის სივრცეა, ასევე $BV^{p(\cdot)}$ სივრცის ელემენტები შემოსაზღვრული ფუნქციებია და თუ $p(x) \geq q(x)$ ყოველ $x \in [a;b]$ წერტილზე, მაშინ $BV^{q(\cdot)} \subset BV^{p(\cdot)}$. დამტკიცებულია ნახევრად ადიციურობა 2^{p^+-1} კოეფიციენტით, ანუ ყოველი $c \in (a;b)$ წერტილისთვის $V_{[a;b]}^{p(\cdot)} \leq 2^{p^+-1}\left(V_{[a;c]}^{p(\cdot)} + V_{[c;b]}^{p(\cdot)}\right)$ (უნდა შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული დებულება სამართლიანი არ არის და შესაბამის არგუმენტს მოვიყვანთ მოგვიანებით იხ. თეორემა 10 და მაგალითი 1). დამტკიცებულია ჰელის ამორჩევის სამართლიანობა $BV^{p(\cdot)}$ კლასის ფუნქციათათვის. დასაბუთებულია, რომ $BV^{p(\cdot)}$ სივრცე არ

არის სეპარაბელური. შემოღებულია ცვლადმაჩვენებლიანი უწყვეტობის მოდული და აბსოლუტურად უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე. ნაჩვენებია, რომ $BV^{p(\cdot)}$ სივრცის აბსოლუტურად უწყვეტი ნაწილი ჩაკეტილ სეპარაბელურ ქვესირვცეს წარმოადგენს.

3 ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიაციის ფუნქციათა $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცე

ამ პარაგრაფში ჩვენ შემოვიღებთ ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიაციის ფუნქციის ცნებას განსხვავებული გზით. შევისწავლით მიღებულ კლასს, მოვიყვანთ შედეგებს $BV^{p(\cdot)}$ და $WBV_{p(\cdot)}$ კლასების მსგავსებებისა და განსხვავებების შესახებ.

3.1 $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცის განსაზღვრა

დავუშვათ $p : [a; b] \to [1; +\infty)$ ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქციაა $[a; b]$ სეგმენტზე. $Q \subset [a; b]$ ინტერვალისთვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\bar{p}(Q) = \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \frac{1}{p(x)} dx \right)^{-1}.$$

$\Pi_{[a;b]}$ სიმბოლოთი როგორც წინა პარაგრაფში აღნიშნული გვაქვს $[a; b]$ სეგმენტის Q_k ინტერვალებით სასრულ დანაწილებათა სიმრავლე.

განსაზღვრება 4. ვიტყვით, რომ $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ ფუნქცია არის $WBV_{p(\cdot)}$ სასრული ვარიაციის, თუ

$$V_a^b(p, f) := \sup_{\Pi_{[a;b]}} \sum |f(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)} < +\infty. \tag{2}$$

სადაც $|f(Q_k)| = |f(x_k) - f(x_{k-1})|$, ხოლო x_{k-1} და x_k არიან Q_k ინტერვალის ბოლოები.

$V_a^b(p, f)$ სიდიდეს ტრადიციულად უწოდებენ f ფუნქციის ვარიაციას, ჩვენც, ტრადიციისამებრ ამავე ტერმინით მოვიხსენიებთ.

შენიშვნა 2. პირველი, რასაც შევნიშნავთ ამ განსაზღვრების შემდეგ, არის ის, რომ განსხვავებით $BV^{p(\cdot)}$ კლასისგან $WBV_{p(\cdot)}$ კლასი ფორმალურად განისაზღვრება შემოუსაზღვრელი მაჩვენებლებისთვისაც. ცხადია, მხოლოდ ფორმალური განსაზღვრება საკმარისი არ არის, დამატებით უნდა ვაჩვენოთ, რომ მიღებული კლასი არ იქნება ტრივიალური. ამისთვის განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} 1/n^2, & \text{თუ } \; x = 1/n; \\ 0, & \text{თუ } \; x \notin \{1/n \, : \, n \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

ცხადია, რომ ეს ფუნქცია ეკუთვნის ნებისმიერ $WBV_{p(\cdot)}$ კლასს ინტეგრებადი მაჩვენებლით, მაშინაც კი, როდესაც მაჩვენებელი შემოუსაზღვრელია.

ცხადია, რომ სხვადასხვა არსებითად შემოუსაზღვრელი მაჩვენებლებისთვის, მრავალი ამ-გვარი მაგალითის მოყვანაა შესაძლებელი, მათ შორის უწყვეტის და ისეთის, რომ რხევა $[a;b]$-ზე აჭარბებდეს 1-ს და ა.შ. მაგრამ ჩვენ შემოვიფარგლებით ამ მაგალითით.

ჩვენ $WBV_{p(\cdot)}$ სიმრავლეზე შემოვიღებთ ნორმას, ამისათვის კი დავგჭირდება დავამტკიცოთ ზოგიერთი დამხმარე დებულება.

ლემა 1. *ფუნქციონალი $V_a^b(p,f)$ წარმოადგენს ამოზნექილ ფსევდომოდულარს.*

დამტკიცება. ცხადია, რომ თუ $f=0$, მაშინ $V_a^b(p,f)=0$. თუ $|\alpha|=1$, ცხადია, $|\alpha f(Q)| = |f(Q)|$ მივიღებთ, რომ $V_a^b(p,\alpha f)=V_a^b(p,f)$. შევამოწმოთ ამოზნექილობა. ვინაიდან, $p(x)\geq 1$ ყოველი $x\in[a;b]$ წერტილისთვის, შესაბამისად $1/p(x)\leq 1$, აქედან ნებისმიერი $Q\in[a;b]$ ინტერვალისთვის გვაქვს

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \frac{1}{p(x)}dx \leq 1.$$

ამგვარად, მივიღეთ, რომ $\bar{p}(Q)\geq 1$. შესაბამისად $x\to x^{\bar{p}(Q_k)}$ ასახვა ამოზნექილია ქვემოდან, მაშინ გვექნება $(\alpha x+(1-\alpha)x)^{\bar{p}(Q_k)}\leq \alpha x^{\bar{p}(Q_k)}+(1-\alpha)x^{\bar{p}(Q_k)}$, ყოველი $\alpha\in[0;1]$ რიცხვისთვის, ამ უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$|\alpha f(Q_k)+(1-\alpha)g(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)}\leq \alpha|f(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)}+(1-\alpha)|g(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)}.$$

თუ ამ უკანასკნელ უტოლობას გამოვიყენებთ (2)-ის ჯამის ყოველი, შესაკრებისთვის მივიღებთ, რომ

$$V_a^b(p,\alpha f+(1-\alpha)g)\leq \alpha V_a^b(p,f)+(1-\alpha)V_a^b(p,g).$$

■

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი თვისება $f\in WBV_{p(\cdot)}$ ფუნქციისა.

თეორემა 1. *თუ $f\in WBV_{p(\cdot)}$, მაშინ f შემოსაზღვრულია.*

დამტკიცება. დავუშვათ, საწინააღმდეგო და ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ

$$\limsup_{x\to b-} f(x)=+\infty,$$

ამასთან $f(a)<+\infty$. მაშინ არსებობს $x_n\to b$, ისეთი, რომ $f(x_n)\to+\infty$. განვიხილოთ

$$V_a^b(p,f)\geq |f(x_n)-f(a)|^{\bar{p}(a;x_n)}\to+\infty,\ \ n\to+\infty.$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა $V_a^b(p,f)=+\infty$. ■

ვინაიდან, ფსევდო მოდულარის საშუალებით შეგვიძლია, შემოვიღოთ ლუქსემბურგის ნორმა, ხოლო ლემა 1-ის ძალით V_a^b ამოზნექილი ფსევდომოდულარია და თეორემა 1-ის ძალით ყოველი ფუნქცია $WBV_{p(\cdot)}$ სიმრავლიდან შემოსაზღვრულია, მაშინ $WBV_{p(\cdot)}$ სასრული ვარიაციის ფუნქციათა სირმავლეზე შეგვიძლია, შემოვიღოთ ნორმა შემდეგი სახით:

$$\|f\|_{WBV_{p(\cdot)}} := \sup_{a\leq x\leq b}|f(x)| + \inf\left\{\lambda > 0 : V_a^b(p, f/\lambda) \leq 1\right\}. \tag{3}$$

ის ფაქტი, რომ მოყვანილი ფუნქციონალი ნორმაა, ტრივიალური დასამტკიცებელია.

ამგვარად, შემოვიღეთ წრფივი ნორმირებული სივრცე $WBV_{p(\cdot)}$ შესაბამისი $\|\cdot\|_{WBV_{p(\cdot)}}$ ნორმით, ჩვენი ამოცანაა, შევისწავლოთ აღნიშნული სივრცე, დავადგინოთ მისი თვისებები და კავშირი $BV^{p(\cdot)}$ სივრცესთან.

3.2 კავშირი $WBV_{p(\cdot)}$ და $BV^{p(\cdot)}$ სივრცეებს შორის

ამ პარაგრაფის 3.1 პუნქტში $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცის განსაზღვრების შემდეგ, შენიშვნა 2-ში აღვნიშნეთ, რომ პირველი განსხვავება, რაც სივრცეების განსაზღვრებისთანავე ნათელია, არის ის, რომ $BV^{p(\cdot)}$ სივრცეებს [2] ნაშრომში ავრტორები განსაზღვრავენ მხოლოდ შემოსაზღვრული მაჩვენებლებისთვის, ხოლო ჩვენი განსაზღვრებისთვის მაჩვენებელი საკმარისია, იყოს ლებეგის აზრით ინტეგრებადი ფუნქცია. ამ პუნქტში მოვიყვანთ შედეგებს, რომლებიც ძირითადად ეხებიან $WBV_{p(\cdot)}$ და $BV^{p(\cdot)}$ სივრცეების საერთო და განსხვავებულ თვისებებს.

გარდა იმისა, რომ შემოუსაზღვრელი მაჩვენებლებისთვის არ განისაზღვრება $BV^{p(\cdot)}$ სივრცე, საინტერესოა შემოსაზღვრული მაჩვენებლის შემთხვევაში, ჭეშმარიტია თუ არა $WBV_{p(\cdot)} \subset BV^{p(\cdot)}$ ან $BV^{p(\cdot)} \subset WBV_{p(\cdot)}$ ჩართვებიდან რომელიმე? სანამ ამ კითხვაზე ვუპასუხებთ, ჯერ დავამტკიცებთ ერთ დამხმარე დებულებას.

ლემა 2. *მოცემულია $[a;b]$-ზე ინტეგრებადი f ფუნქცია, მაშინ მოიძებნება ისეთი $x, y \in [a;b]$, რომ სამართლიანია უტოლობა:*

$$f(x) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq f(y).$$

დამტკიცება. თუ, f მუდმივის ექვივალენტური ფუნქციაა, თითქმის ყველა x და y წერტილებისთვის შესრულდება მოცემული უტოლობა. დავუშვათ, რომ f არ არის მუდმივის ექვივალენტური ფუნქცია. ჩვენ დავამტკიცებთ მხოლოდ მარჯვენა უტოლობას, მარცხენა უტოლობა დამტკიცდება იმავე გზით და ანალოგიური მსჯელობით. დავუშვათ, საწინააღმდეგო ყოველი $y \in (a;b)$ წერტილისათვის სრულდება

$$f(y) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \mu.$$

მივიღებთ, რომ $f(y) < \mu$ ყოველი $y \in (a;b)$ წერტილისთვის, თუ ვაინტეგრებთ უტოლობის ორივე მხარეს, მივიღებთ შემდეგ უტოლობას

$$\int_a^b f(y)dy < \mu(b-a) = \int_a^b f(t)dt,$$

რაც წინააღმდეგობაა. ■

თეორემა 2. *დავუშვათ, p შემოსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ $BV^{p(\cdot)} \subset WBV_{p(\cdot)}$.*

დამტკიცება. განვიხილოთ, $[a;b]$ სეგმენტის ნებისმიერი სასრული დანაწილება $\mathcal{Q} = \{Q_k\}$. თუ p ფუნქცია მუდმივია Q_k ინტერვალზე, მაშინ $\bar{p}(Q_k) = p(x_{k-1})$ ყოველი $x_{k-1} \in Q_k$ წერტილისთვის. თუ p ფუნქცია არაა მუდმივი Q_k-ზე, მაშინ ლემა 2-ის ძალით არსებობენ $x^1_{k-1}, x^2_{k-1} \in Q_k$ წერტილები ისეთი, რომ $p(x^1_{k-1}) \leq \bar{p}(Q_k) \leq p(x^2_{k-1})$, მაშინ ამავე დანაწილებისთვის განვიხილოთ ჯამი

$$\sum |f(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)} \leq \sum |f(Q_k)|^{p(x^i_{k-1})},$$

სადაც

$$x^i_{k-1} = \begin{cases} x^1_{k-1}, & \text{თუ } |f(Q_k)| < 1; \\ x^2_{k-1}, & \text{თუ } |f(Q_k)| \geq 1. \end{cases}$$

ვინაიდან, დანაწილება ნებისმიერად იყო არჩეული მივიღეთ, რომ

$$V_a^b(p,f) \leq \sup_{\Pi^*_{[a;b]}} \sum |f(Q_k)|^{p(x^i_{k-1})} = \rho_{(a;b)}(f).$$

ამრიგად, თუ $f \in BV_{p(\cdot)}$, მაშინ $V_a^b(f) < +\infty$ რაც ნიშნავს, რომ $f \in WBV_{p(\cdot)}$. ■

ბუნებრივია, ჩნდება კითხვა: ჭეშმარითია თუ არა $WBV_{p(\cdot)} \subset BV^{p(\cdot)}$ ჩადგმა? ამ კითხვაზე პასუხი, საზოგადოდ, უარყოფითია.

თეორემა 3. *არსებობს შემოსაზღვრული ექსპონენტა ფუნქცია, რომლის შესაბამისი ცვლადმაჩვენებლიანი ვარიაციული სივრცეებისთვის სრულდება $WBV_{p(\cdot)} \backslash BV^{p(\cdot)} \neq \emptyset$.*

დამტკიცება. განვიხილოთ $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ სირავლე, მაჩვენებელი $p(x) = 4 - 2X_A(x)$ და ფუნქცია

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}}, & \text{თუ } x = \frac{1}{n}; \\ 0 & \text{თუ } x \neq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

ცხადია, $f(0) = 0$. შევამოწმოთ, ეკუთვნის თუ არა f ფუნქცია $BV^{p(\cdot)}$ სივრცეს.

$$\sup_{\Pi^*_{a;b}} \sum |f(Q_k)|^{p(x_{k-1})} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}; \frac{2n-1}{2n^2-2n}\right)\right|^{p\left(\frac{1}{n}\right)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

მივიღეთ, რომ $f \notin BV^{p(\cdot)}$. მეორე მხრივ, როგორი დანაწილებაც არ უნდა განვიხილოთ, ვინაიდან $|A| = 0$ მივიღებთ, რომ $\bar{p}(Q) = 4$ ყოველი Q ინტერვალისთვის დანაწილებიდან. მაშინ

$$\sup_{\Pi_{[a;b]}} \sum |f(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4 = \frac{\pi^2}{3}.$$

ანუ $f \in WBV_{p(\cdot)}$ და შესაბამისად $f \in WBV_{p(\cdot)} \backslash BV^{p(\cdot)}$. ■

შენიშვნა 3. ნათელია, რომ დასმულ კითხვაზე თეორემა 3 მხოლოდ ნაწილობრივ იძლევა პასუხს. ვინაიდან, ცხადია, რომ მუდმივი მაჩვენებლებისთვის $WBV_{p(\cdot)}$ და $BV^{p(\cdot)}$ სივრცეები ერთმანეთს ემთხვევა. ამგვარად ყალიბდება ღია ამოცანა:

ამოცანა 1. დაადგინეთ p მაჩვენებელი ფუნქციისთვის აუცილებელი ან საკმარისი პირობა, რომლისთვისაც გვექნება $WBV_{p(\cdot)} = BV^{p(\cdot)}$ ტოლობა.

ამ ამოცანასთან დაკავშირებით ჩვენი ჰიპოთეზაა, რომ ერთ-ერთი საკმარისი პირობა იქნება p მაჩვენებლის ე.წ. ლოგ-ჰელდერის უწყვეტობის თვისება.

3.3 $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცის თვისებები

პირველ რიგში, შევამოწმოთ, არის თუ არა ჩვენი შემოღებული $WBV_{p(\cdot)}$ ნორმირებული სივრცე ე. წ. ბანახის ფუნქციური სივრცე, რომლის განსაზღვრებას მოვიყვანთ ბენეტისა და შარპლის [1] მონოგრაფიის მიხედვით.

დავუშვათ, $\mathcal{M}$ აღნიშნავს ყველა ზომად ფუნქციათა სივრცეს და მოცემულია დადებითად ერთგვაროვანი და ამოზნექილი ფუნქციონალი $||\cdot||_X$, მაშინ განვსაზღვრავთ სიმრავლეს

$$X := \{f \in \mathcal{M} \,:\, ||f||_X < +\infty\}.$$

ცხადია $(X, ||\cdot||_X)$ წყვილი არის წრფივი ნორმირებული სივრცე. ამასთან ვიტყვით, რომ X არის ბანახის ფუნქციური სივრცე თუ $||\cdot||_X$ ნორმა აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:

(i) $||f||_X = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ თ. ყ., $||\alpha f(x)||_X = |\alpha| \cdot ||f||_X$ და $||f+g||_X \leq ||f||_X + ||g||_X$;

(ii) თუ $|g(x)| \leq |f(x)|$ თ. ყ., მაშინ $||g||_X \leq ||f||_X$;

(iii) თუ $f_n \in X$ და $0 \leq f_n \uparrow f$ თ. ყ., მაშინ $||f_n||_X \uparrow ||f||_X$;

(iv) თუ $|E| < +\infty$, მაშინ $||\chi_E||_X < +\infty$;

(v) თუ $|E| < +\infty$, მაშინ $\int_E f(x)dx \leq C_E ||f||_X$. სადაც $C_E > 0$ მუდმივი დამოკიდებულია მხოლოდ E სიმრავლეზე.

ცხადია $\|\cdot\|_{WBV_{p(\cdot)}}$ ნორმისთვის (i) აქსიომა სრულდება. თუმცა რაც შეეხება (ii), (iii), და (iv) თვისებებს ისინი არ სრულდება. მართლაც (ii) აქსიომისთვის განვიხილოთ g ფუნქცია, რომლის გრაფიკი წარმოადგენს $(a,0)$ და $(b,1)$ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს, ხოლო f ფუნქციის გრაფიკი წარმოადგენდეს $(a,1/2)$ და $(b,1)$ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთს. მაშინ ცხადია, რომ $0\le g(x)\le f(x)$ ყოველი $x\in[a;b]$ წერტილისთვის, მაგრამ

$$||g||_{WBV_{p(\cdot)}}=2>1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\bar{p}(a;b)}=||f||_{WBV_{p(\cdot)}}.$$

(iii) აქსიომისთვის განვიხილოთ f_n ფუნქციები, რომელთა გრაფიკები წარმოადგენს შესაბამისად $\left(a,\frac{n}{n+1}\right)$ და $(b,1)$ წერტილების შემაერთებელ მონაკვეთებს. მაშინ ცხადია $0<f_n\uparrow f=1$, მაგრამ

$$||f_n||_{WBV_{p(\cdot)}}=1+\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\bar{p}(a;b)}\downarrow 1=||f||_{WBV_{p(\cdot)}}.$$

და, ბოლოს (iv) აქსიომისთვის განვიხილოთ $E=\mathbb{Q}\cap[a;b]$, მაშინ ცხადია $|E|=0$, მაგრამ $||\chi_E||_{WBV_{p(\cdot)}}=+\infty$.

მოყვანილი მსჯელობიდან გამომდინარეობს, რომ $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცე არ არის ბანახის ფუნქციური სივრცე, რაც, თავის მხრივ, აღნიშნული სივრცის კვლევისას არ გვაძლევს საშუალებას, გამოვიყენოთ კარგად ცნობილი და დამუშავებული მეთოდები, რომლებიც სამართლიანია ბანახის ფუნქციურ სივრცეთათვის. ცხადია, აღნიშნული ფაქტი უფრო მეტ ტექნიკურ სირთულეს გვიქმნის, ვიდრე შეგვექმნებოდა იმ შემთხვევაში $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცე რომ გამოსულიყო ბანახის ფუნქციური სივრცე. თუმცა, ზემოთქმულის მიუხედავად, აღვნიშნავთ, რომ $WBV_{p(\cdot)}$ არის სრული ნორმირებული სივრცე, ანუ

თეორემა 4. *$WBV_{p(\cdot)}$ ბანახის სივრცეა.*

დამტკიცება. ნორმა მოცემულია სივრცეზე. შევამოწმოთ ამ სივრცის სისრულე. დავუშვათ, მოცემულია f_n ფუნდამენტური მიმდევრობა, ანუ ყოველი $\varepsilon>0$ რიცხვისთვის არსებობს $N:=N(\varepsilon)$ ისეთი, რომ ყოველი $n,m>N$ ნატურალური რიცხვებისთვის სრულდება

$$||f_m-f_n||_{WBV_{p(\cdot)}}<\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sup_{a\le x\le b}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon,$$

ეს კი ნიშნავს, რომ f_n ფუნქციათა მიმდევრობა თანაბრად კრებადია რომელიღაც f ფუნქციისკენ. გარდა ამისა, მოდულარსა და ნორმას შორის კავშირიდან ვასკვნით, რომ $V_a^b(p,f_m-f_n)<\varepsilon$. გადავიდეთ ზღვარზე, როცა $n\to+\infty$ შემდეგ გამოსახულებაში:

$$\lim_{n\to\infty}\sum|\left(f_m-f_n\right)(Q)|^{\bar{p}(Q)}=\sum|\left(f_m-f\right)(Q)|^{\bar{p}(Q)}\le\varepsilon.$$

ამასთან

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{a\le x\le b}|f_m(x)-f_n(x)|=\sup_{a\le x\le b}|f_m(x)-f(x)|\le\varepsilon.$$

ბოლო ორი უტოლობიდან ვასკვნით, რომ $\|f_m-f\|_{WBV_{p(\cdot)}}\le 2\varepsilon,\ \forall m>N$. საბოლოოდ, $\forall m>N$ რიცხვისთვის გვაქვს

$$\|f\|_{WBV_{p(\cdot)}}-\|f_m\|_{WBV_{p(\cdot)}}\le\|f_m-f\|_{WBV_{p(\cdot)}}\le 2\varepsilon,$$

ანუ

$$\|f\|_{WBV_{p(\cdot)}}\le\|f_m\|_{WBV_{p(\cdot)}}+2\varepsilon.$$

აქედან კი გამომდინარეობს, რომ $f\in WBV_{p(\cdot)}$. ■

დავამტკიცეთ, რომ $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცე ბანახის სივრცეა, ახლა შევისწავლოთ სეპარაბელობაზე, სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 5. $WBV_{p(\cdot)}$ *არასეპარაბელური სივრცეა.*

დამტკიცება. განვიხილოთ $A:=\{\chi_{\{x\}}\ :\ x\in(a;b)\}$ სიმრავლე. ცხადია, ეს სიმრავლე კონტინუმის სიმძლავრისაა, ამასთან $||\chi_{\{x\}}(\cdot)-\chi_{\{y\}}(\cdot)||_{WBV_{p(\cdot)}}\ge 1$, $x\neq y$. თუ A სიმრავლის თითოეულ ელემენტს დავაფარებთ ბირთვს რადიუსით $1/2$ ცხადია, რომ ეს ბირთვები არ გადაიკვეთება და ვინაიდან, სიმრავლე კონტინუმი სიმძლავრისაა, ამ ბირთვებში ვერ მოთავსდება თვლადი სიმრავლე. ■

შემდეგი თეორემა ამყარებს კავშირს სხვადასხვა p_1 და p_2 მაჩვენებლებისთვის შესაბამის $WBV_{p_1(\cdot)}$ და $WBV_{p_2(\cdot)}$ სივრცეებს შორის.

თეორემა 6. *დავუშვათ, მოცემულია* $p_1,p_2:[a;b]\to[1;+\infty)$ *და* $p_1(x)\le p_2(x)$ *თ.ყ.* $x\in[a;b]$, *მაშინ* $WBV_{p_1(\cdot)}\hookrightarrow WBV_{p_2(\cdot)}$.

დამტკიცება. ვინაიდან $p_1(x)\le p_2(x)$ მივიღებთ $\frac{1}{p_1(x)}\ge\frac{1}{p_2(x)}$ ინტეგრალის მონოტონობის ძალით $\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{p_1(x)}dx\ge\frac{1}{|Q|}\int_Q\frac{1}{p_2(x)}dx$, საბოლოოდ მივიღებთ, რომ $\bar p_1(Q)\le\bar p_2(Q)$.

განვიხილოთ $\|f\|_{WBV_{p_1(\cdot)}}=1$, მაშინ ყოველი $Q\subset[a;b]$ ინტერვალისთვის გვაქვს $|f(Q)|\le 1$ და წინა უტოლობის ძალით გვაქვს

$$\sum|f(Q)|^{\bar p_2(Q)}\le\sum|f(Q)|^{\bar p_1(Q)}.$$

თუ უტოლობის ორივე მხარეს დავუწერთ სუპრემუმს დანაწილების მიმართ მივიღებთ

$$V_a^b(p_2,f)\le V_a^b(p_1,f)<+\infty,$$

ანუ $||f||_{WBV_{p_2(\cdot)}} \leq ||f||_{WBV_{p_1(\cdot)}}$. ■

შენიშვნა 4. თეორემაში მოყვანილია საკმარისი პირობა $WBV_{p_1(\cdot)} \hookrightarrow WBV_{p_2(\cdot)}$ უწყვეტი ჩადგმისთვის, თუმცა დამტკიცებიდან არ ჩანს, იქნება თუ არა იგი აუცილებელიც, როგორც ეს არის ცვადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეთა შემთხვევაში (იხ. [3, თეორემა 2.45, გვ. 37]).

აღნიშნული შენიშვნის შემდეგ, ამ საკითხის ტექნიკური სირთულიდან გამომდინარე, მიზანშეწონილად მიგვაჩნია, დავსვათ შემდეგი

ამოცანა 2. არის თუ არა $p_1(x) \leq p_2(x)$ თ.ყ. $x \in [a;b]$, პირობა აუცილებელი $WBV_{p_1(\cdot)} \hookrightarrow WBV_{p_2(\cdot)}$ უწყვეტი ჩადგმისთვის?

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცეს აქვს მრავალი როგორც მსგავსი თვისება ჟორდანის აზრით სასრული ვარიაციების ფუნქციებისა, ასევე მოულოდნელი და განსხვავებულიც. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 7. *დავუშვათ $p \in L^\infty[a;b]$ და $f \in WBV_{p(\cdot)}$, მაშინ ყოველ $x \in [a;b]$ წერტილში არსებობენ მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები.*

დამტკიცება. თეორემა 1-ის ძალით f ფუნქცია შემოსაზღვრულია, მაშინ დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ ყოველ წერტილში არ არსებობს მარცხენა ზღვარი, ანუ არსებობს $x \in (a;b]$ წერტილი ისეთი, რომ

$$c := \liminf_{t \to x-} f(t) < \limsup_{t \to x-} f(t) =: d < +\infty.$$

მაშინ არსებობენ $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ და $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ მიმდევრობები, ისეთი, რომ $t_n < s_n < t_{n+1} < s_{n+1}$ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისთვის, ამასთან $t_n \uparrow x$, $s_n \uparrow x$, $n \to +\infty$ და

$$c = \lim_{n\to+\infty} f(s_n), \qquad d = \lim_{n\to+\infty} f(t_n).$$

აქედან გამომდინარე არსებობს ნომერი $N \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ ყოველი ნატურალური $n > N$ რიცხვისთვის გვაქვს

$$f(t_n) - f(s_n) > \frac{d-c}{2}.$$

მაშინ

$$V_a^b(p,f) \geq \sum_{n>N} (f(t_n) - f(s_n))^{\bar{p}(t_n;s_n)} \geq \sum_{n>N} \left(\frac{d-c}{2}\right)^{\bar{p}(t_n;s_n)} \geq$$
$$\geq \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{n>N} \left(\frac{d-c}{2}\right)^{||p||_\infty} & \text{თუ} \quad \frac{d-c}{2} < 1 \\ \sum\limits_{n>N} \left(\frac{d-c}{2}\right) & \text{თუ} \quad \frac{d-c}{2} \geq 1 \end{array} \right\} = +\infty.$$

ამგვარად დავამტკიცეთ, რომ $f \in WBV_{p(\cdot)}$ ფუნქციისთვის ყოველ წერტილში არსებობს მარცხენა ზღვარი, ანალოგიური გზით დამტკიცდება, რომ ამავე ფუნქციისთვის ყოველ წერტილში არსებობს მარჯვენა ზღვარი. ■

შედეგი 1. *თუ $f \in BV^{p(\cdot)}$, მაშინ f ფუნქციას ყოველ წერტილში გააჩნია მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები.*

დამტკიცება. ვინაიდან, $BV^{p(\cdot)}$ სივრცე განსაზღვრულია, მხოლოდ შემოსაზღვრული მაჩვენებლებისთვის ვიღებთ, რომ p შემოსაზღვრულია, ამასთან თეორემა 2-ის ძალით $BV^{p(\cdot)} \subset WBV_{p(\cdot)}$. მაგრამ შემოსაზღვრული მაჩვენებლებისთვის თეორემა 7-ის ძალით ყველა $WBV_{p(\cdot)}$ ფუნქციას ყველა წერტილში გააჩნია ცალმხრივი ზღვრები. ■

შენიშვნა 5. ბუნებრივია ჩნდება კითხვა: თუ მაჩვენებელი არ არის არსებითად შემოსაზღვრული, მაშინ ნარჩუნდება თუ არა აღნიშნული შედეგი? როგორც აღმოჩნდა, ამ კითხვაზე პასუხი უარყოფითია, ანუ არსებობს $p \notin L^{\infty}[a;b]$ და $f \in WBV_{p(\cdot)}$ ისეთი, რომ არ არსებობს მარჯვენა ზღვარი a წერტილში.

დამტკიცება. დავუშვათ,

$$p(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} n \cdot \chi_{\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right]}(x).$$

ხოლო

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \chi_{\left\{\frac{1}{n}\right\}}(x).$$

იოლი დასანახია, რომ

$$V_a^b(p, f) \le 2 \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 2,$$

ანუ $f \in WBV_{p(\cdot)}$ ■

ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ თუ p მაჩვენებელი არსებითად შემოსაღვრულია, მაშინ შესაბამის $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცის ყოველ ფუნქციას ყოველ წერტილში გააჩნია მარჯვენა და მარცხენა ზღვრები. ამასთან ვაჩვენეთ, რომ არსებობს არსებითად შემოუსაზღვრელი მაჩვენებელი და მის შესაბამის $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცეში ფუნქცია, რომელსაც ცალმხრივი ზღვარი არ გააჩნია. მიუხედავად აღნიშნული შედეგებისა, ნათელია, რომ საკითხი სრულად ამოწურული არ არის და დაისმის

ამოცანა 3. ყოველი არსებითად შემოუსაზღვრელი ექსპონენტა ფუნქციისთვის მის შესაბამის $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცეში არსებობს, თუ არა ისეთი ფუნქცია, რომელსაც რომელიმე წერტილში არ გააჩნია რომელიმე ცალმხრივი ზღვარი?

კარგად არის ცნობილი, რომ ჟორდანის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. ეს წინადადება გამომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ ჟორდანის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქცია წარმოიდგინება, როგორც ორი არაკლებადი ფუნქციის სხვაობა, ხოლო მონოტონური ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია. ცხადია, რომ საზოგადოდ $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცის ფუნქცია არ წარმოიდგინება ორი არაკლებადი ფუნქციის სხვაობის სახით. მიუხედავად ამისა, ანალოგიური შედეგი მაინც არის სამართლიანი ამ კლასის ფუნქციებისთვის.

თეორემა 8. *თუ $p \in L^\infty[a;b]$, მაშინ $f \in WBV_{p(\cdot)}$ ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადი სიმძლავრისაა.*

დამტკიცება. დავუშვათ, საწინააღმდეგო წყვეტის წერტილთა სიმრავლე $E \subset [a;b]$ არათვლადია. თეორემა 7-ის ძალით ყოველ წერტილში არსებობს ცალმხრივი ზღვრები, მათ შორის E სიმრავლის წერტილებშიც. E სიმრავლის არათვლადობის გამო არსებობს $n \in \mathbb{N}$ რიცხვი ისეთი, რომ $E_n \subset E$ სიმრავლე ისეთი წყვეტის წერტილთა რომელთათვისაც სრულდება $|f(x_k) - f(x_k-)| > 1/n$ ან $|f(x_k) - f(x_k+)| > 1/n$ არ არის სასრული, მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში, თუ ყოველი n რიცხვისთვის ამგვარი წერტილების რაოდენობა სასრულია, მაშინ მივიღებთ, რომ E სიმრავლე წარმოდგენს სასრული სიმრავლეების თვლად გაერთიანებას. შესაბამისად იქნება თვლადი და მივიღებთ წინააღმდეგობას. ანუ E_n სიმრავლე უსასრულოა. ვინაიდან, ყოველი უსასრულო სიმრავლე მოიცავს თვლად ქვესიმრავლეს ზოგადობის შეუზღუდავად, ვიგულისხმოთ, რომ E_n სიმრავლე თვლადია. ნებისმიერი $M > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $N \in \mathbb{N}$ რიცხვი, ისეთი, რომ $N > n^{||p||_\infty} \cdot M$. E_n სიმრავლიდან ავირჩიოთ სასრული და ზრდადი მიმდევრობა $\{x_k\}_{k=0}^N$ და ამ მიმდევრობის თითოეული წერტილისთვის შევარჩიოთ x'_k წერტილი იმგვარად, რომ $|f(x_k) - f(x'_k)| > 1/n$. x'_k წერტილები აღმოჩნდებიან x_k წერტილის ან მარჯვნივ ან მარცხნივ. შესაბამისად Q'_k სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ინტერვალი $(x'_k; x_k)$ ან $(x_k; x'_k)$, ამასთან ისე შევარჩიოთ x'_k წერტილები, რომ Q'_k ინტერვალები იყვნენ თანაუკვეთები. განვიხილოთ $[a;b]$ სეგმენტის ისეთი სასრული დანაწილება $\{t_s\}_{s=0}^m$, რომ $\{x_k\}_{k=0}^N \cup \{x'_k\}_{k=0}^N \subset \{t_s\}_{s=0}^m$, მაშინ

$$\sum_{s=0}^{m} |f(Q_s)|^{\bar{p}(Q_s)} \geq \sum_{k=0}^{N-1} |f(Q'_k)|^{\bar{p}(Q'_k)} \geq \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\bar{p}(Q'_k)} \geq N \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{||p||_\infty} > M.$$

აქედან M რიცხვის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ, რომ $V_a^b(p, f) = +\infty$, ანუ $f \notin WBV_{p(\cdot)}$. ■

შედეგი 2. *თუ $f \in BV^{p(\cdot)}$, მაშინ f ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.*

დამტკიცება. ვინაიდან, $BV^{p(\cdot)}$ სივრცე განსაზღვრულია, მხოლოდ შემოსაზღვრული მაჩვენებლებისთვის ვიღებთ, რომ p შემოსაზღვრულია, ამასთან თეორემა 2-ის ძალით $BV^{p(\cdot)} \subset$

$WBV_{p(\cdot)}$. მაგრამ შემოსაზღვრული მაჩვენებლებისთვის თეორემა 8-ის ძალით $WBV_{p(\cdot)}$ ფუნქციის წყვეტის წერტილები არაუმეტეს თვლადი სიმრავლეა. ■

თეორემა 7-ის ანალოგიურად აქაც ჩნდება კითხვა: რამდენად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს მაჩვენებელი ფუნქციის არსებითად შემოსაზღვრულობა? როგორც ირკვევა, მაჩვენებლის შემოსაზღვრულობა არსებით როლს თამაშობს.

თეორემა 9. *არსებობს შემოუსაზღვრელი p მაჩვენებელი და $f \in WBV_{p(\cdot)}$ ისეთი ფუნქცია, რომ წყვეტის წერტილთა სიმრავლე კონტინუმის სიმძლავრისაა.*

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $a = 0$ და $b = 1$. დავუშვათ $\mathcal{C}$ აღნიშნავდეს კანტორის სიმრავლეს. დავუშვათ

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \chi_{\mathcal{C}}(x).$$

ცხადია, მოცემული ფუნქციისთვის $\mathcal{C}$ სიმრავლე წარმოადგენს წყვეტის წერტილთა სიმრავლეს. გადავნომროთ $\mathcal{C}$ სიმრავლის მეზობელი ინტერვალები დასტებად, ანუ $I_1^1 = (1/3; 2/3)$, $I_2^1 = (1/9; 2/9)$, $I_2^2 = (7/9; 8/9)$, ..., მაშინ $\mathcal{C}$ სიმრავლის ყოველი მეზობელი ინტერვალი გამოისახება შესაბამისი I_n^k სიმბოლოთი, სადაც $k \in \{1, ..., 2^{n-1}\}$. განვსაზღვროთ მაჩვენებელი

$$p(x) = \chi_{\mathcal{C}}(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \chi_{I_n^k}(x).$$

განვიხილოთ $[0; 1]$-ის ნებისმიერი $\{Q_s\}_{s=0}^m$ სასრული დანაწილება. ცხადია, რომ ყოველი Q_s ინტერვალისთვის $f(Q_s) = 0$ ან $f(Q_s) = 1/2$. თუ Q_s ინტერვალის ბოლოები ეკუთვნის $\mathcal{C}$ სიმრავლეს ან მის დამატებას, მაშინ, ცხადია, $f(Q_s) = 0$. ვინაიდან, Q_s თანაუკვეთი ინტერვალებია, მაშინ თითოეული I_n^k ინტერვალი იკვეთება არაუმეტეს ორ ისეთ Q_s ინტერვალთან, რომელთათვისაც $|Q_s| \leq |I_n^k|$ და $f(Q_s) = 1/2$. ამგვარად $[0; 1]$ სეგმენტის ნებისმიერი დანაწილებისთვის გვექნება

$$\sum_{s=0}^{m} |f(Q_s)|^{\bar{p}(Q_s)} \leq 2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

დანაწილების ნებისმიერობის გამო მივიღებთ $V_a^b(p, f) \leq 2$, ანუ $f \in WBV_{p(\cdot)}$. ■

ახლა მოვიყვანოთ $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცის ვარიაციის ადიციურობის თვისებასთან დაკავშირებული შედეგები.

თეორემა 10. *ყოველი $c \in (a; b)$ წერტილისთვის სამართლიანია შემდეგი უტოლობა*

$$V_a^c(p, f) + V_c^b(p, f) \leq V_a^b(p, f).$$

დამტკიცება. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $[a;c]$ სეგმენტის $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = c$ წერტილებით დანაწილება და $[c;b]$ სეგმენტის $c = y_0 < y_1 < ... < y_m = b$ წერტილებით დანაწილება ისეთი, რომ

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1};x_k)|^{\bar{p}(x_{k-1};x_k)} > V_a^c(p,f) - \varepsilon/2.$$

$$\sum_{k=1}^{m} |f(y_{k-1};y_k)|^{\bar{p}(y_{k-1};y_k)} > V_c^b(p,f) - \varepsilon/2.$$

ყოველი ასეთი დანაწილების გაერთიანებით მივიღებთ $[a;b]$ სეგმენტის სპეციფიურ დანაწილებას z_k წერტილებით, სადაც $z_k = x_k$, $k \in \{0,...,n\}$ და $z_{n+k} = y_k$, $k \in \{0,...,m\}$ (c წერტილი ყოველთვის ეკუთვნის ასეთ დანაწილებას), მაშინ

$$V_a^c(p,f) + V_c^b(p,f) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k-1};x_k)|^{\bar{p}(x_{k-1};x_k)} + \sum_{k=1}^{m} |f(y_{k-1};y_k)|^{\bar{p}(y_{k-1};y_k)} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n+m} |f(z_{k-1};z_k)|^{\bar{p}(z_{k-1};z_k)} \leq V_a^b(p,f).$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო, მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას. ■

შემდეგი შედეგი $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცის კიდევ უფრო კონტრასტულ თვისებას გვიჩვენებს ჟორდანისა და ვინერის სასრული ვარიაციის კლასებთან შედარებით. კერძოდ, თუ p მაჩვენებელი მუდმივი არ არის, საზოგადოდ არ სრულდება

$$V_a^b(p,f) \leq C \cdot \Big(V_a^c(p,f) + V_c^b(p,f)\Big)$$

უტოლობა არცერთი $C \geq 1$ მუდმივისთვის. იმისათვის, რომ ჩამოვაყალიბოთ ჩვენი შედეგი, შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\bar{p}_-^x(a;b) := \inf\{\bar{p}(c;d) \ : \ x \in [c;d] \subset [a;b]\}.$$

თეორემა 11. *დავუშვათ, მოცემულია p მაჩვენებელი ფუნქცია. თუ არსებობს $x \in (a;b)$ ისეთი, რომ*

$$\bar{p}_-^x(a;b) < \max\{\bar{p}_-^x(a;x), \bar{p}_-^x(x;b)\}, \tag{4}$$

მაშინ ნებისმიერი $C \geq 1$ რიცხვისთვის არსებობს $f := f_C$ ისეთი ფუნქცია, რომ $f \in WBV_{p(\cdot)}$ და

$$V_a^b(p,f) > C \cdot \Big(V_a^x(p,f) + V_x^b(p,f)\Big).$$

დამტკიცება. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\bar{p}_-^x(a;b) < \bar{p}_-^x(a;x)$ და $A := \bar{p}_-^x(a;x) - \bar{p}_-^x(a;b)$. შევარჩიოთ $K > C^{\frac{1-A}{A}}$ რიცხვი და განვსაზღვროთ ფუნქცია $f(t) = \frac{1}{KC}\chi_{[a;x)}(t)$.

იოლი დასანახია, რომ $f \in WBV_{p(\cdot)}$ ამასთან

$$V_a^b(p,f) = \left(\frac{1}{KC}\right)^{\bar{p}_-^x(a;b)},$$

მეორე, მხრივ $V_x^b(p,f) = 0$ და

$$V_a^x(p,f) = \left(\frac{1}{KC}\right)^{\bar{p}_-^x(a;x)}.$$

მაშინ

$$\begin{aligned} C \cdot \Big(V_a^x(p,f) + V_x^b(p,f)\Big) &= C \cdot V_a^x(p,f) = \\ &= C \cdot \left(\frac{1}{KC}\right)^{\bar{p}_-^x(a;x)} = C \cdot \left(\frac{1}{KC}\right)^{\bar{p}_-^x(a;x) - \bar{p}_-^x(a;b) + \bar{p}_-^x(a;b)} = \\ &= C \cdot \left(\frac{1}{KC}\right)^{A} \cdot \left(\frac{1}{KC}\right)^{\bar{p}_-^x(a;b)} = \frac{C^{1-A}}{K^A} \cdot V_a^b(p,f). \end{aligned}$$

ვინაიდან, $\frac{C^{1-A}}{K^A} < 1$ ვღებულობთ, რომ $V_a^b(p,f) > C \cdot \big(V_a^x(p,f) + V_x^b(p,f)\big)$. ■

შენიშვნა 6. ზემოთ ჩამოყალიბებულ თეორემაში მოყვანილი პირობა (4), ერთი შეხედვით, ნათლად არ აღწერს, როგორი მაჩვენებლებისთვის სრულდება. აღნიშნულთან დაკავშირებით აქ მოვიყვანთ მარტივ მაგალითს, ამგვარი ექსპონენტა ფუნქციისა, ხოლო მოგვიანებით შევეცდებით, უფრო გასაგებად აღვწეროთ ზოგადი დახასიათება ამგვარი მაჩვენებლებისა.

მაგალითი 1. დავუშვათ, $a = 0$, $b = 1$ და $p(t) = 10 \cdot \chi_{[0;1/2]}(t) + 2 \cdot \chi_{(1/2;1]}(t)$. განვიხილოთ $\bar{p}_-^{1/2}(0;1)$ და $\bar{p}_-^{1/2}(0;1/2)$. აღნიშნული სიდიდეების გამოსათვლელად გამოვთვალოთ ჯერ $\bar{p}(c;d)$ სიდიდე სადაც $1/2 \in [c;d] \subset [0;1]$. $\bar{p}(c;d)$ სიდიდე მინიმალური იქნება მაშინ, როდესაც $(d-c)^{-1}\int_c^d 1/p(t)dt$ არის მაქსიმალური, მაგრამ ეს საშუალო მაქსიმალური ხდება იქ, სადაც $p(t)$ ხდება მინიმალური. შესაბამისად, მივიღებთ, რომ $\bar{p}_-^{1/2}(0;1) = \bar{p}_-^{1/2}(1/2;1) = 2$. ახლა გამოვთვალოთ $\bar{p}_-^{1/2}(0;1/2)$, შევნიშნოთ, რომ $[0;1/2]$ სიმრავლეზე ექსპონენტა მუდმივია, ამიტომ, ცხადია, რომ $\bar{p}_-^{1/2}(0;1/2) = 10$. საბოლოოდ, მოცემული p ექსპონენტისთვის ვიპოვეთ $x = 1/2$ წერტილი, რომელშიც სრულდება (4).

შენიშვნა 7. მაგალითის სიმარტივე და მაგალითის განხილვაში მოყვანილი მსჯელობა უფრო ნათელს ხდის, რომ ამგვარი ექსპონენტების კლასი საკმაოდ ფართო უნდა იყოს. თუნდაც ამავე მაგალითის მცირე მოდიფიკაციით ექსპონენტა შეგვიძლია, გავხადოთ უწყვეტი, მაგრამ შესაბამისი $\bar{p}_-^{1/2}(0;1)$ და $\bar{p}_-^{1/2}(0;1/2)$ სიდიდეები არ შეიცვლება.

უფრო დაწვრილებით გავაანალიზოთ (4) პირობა. განვიხილოთ $\bar{p}_-^x(a;b)$, მაშინ განსაზღვრე-

ბიდან გამომდინარე გვაქვს

$$\bar{p}_{-}^{x}(a;b) = \inf\{\bar{p}(c;d) \ : \ x \in [c;d] \subset [a;b]\} = \tag{5}$$

$$= \inf\left\{\left(\frac{1}{d-c}\int_c^d \frac{1}{p(t)}dt\right)^{-1} \ : \ x \in [c;d] \subset [a;b]\right\} = \tag{6}$$

$$= \sup\left\{\frac{1}{d-c}\int_c^d \frac{1}{p(t)}dt \ : \ x \in [c;d] \subset [a;b]\right\} = M\left(\frac{1}{p}\right)(x). \tag{7}$$

აქ M აღნიშნავს, კარგად ცნობილ, ჰარდისა და ლიტლვუდის მაქსიმალურ ოპერატორს. ანუ

$$Mf(x) := \sup_{(y;z)\ni x} \frac{1}{z-y}\int_y^z f(t)dt.$$

მაშინ ანალოგიურად მივიღებთ, რომ

$$\bar{p}_{-}^{x}(a;x) = M^{-}\left(\frac{1}{p}\right)(x), \qquad \text{და} \qquad \bar{p}_{-}^{x}(x;b) = M^{+}\left(\frac{1}{p}\right)(x).$$

სადაც M^{-} და M^{+} სიმბოლოები აღნიშნავენ ჰარდისა და ლიტლვუდის ცალმხრივ მაქსიმალურ ოპერატორებს, ანუ

$$M^{-}f(x) := \sup_{a\le y<x} \frac{1}{x-y}\int_y^x f(t)dt \qquad \text{და} \qquad M^{+}f(x) := \sup_{x<y\le b} \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)dt.$$

მაშინ ამ ტერმინებში (4) პირობა გადაიწერება შემდეგი სახით: თუ არსებობს ისეთი $x \in (a;b)$, რომ

$$M\left(\frac{1}{p}\right)(x) > \min\left\{M^{-}\left(\frac{1}{p}\right)(x), M^{+}\left(\frac{1}{p}\right)(x)\right\}.$$

ამგვარად, იმ ექსპონენტების არსებობა, რომელთათვისაც სრულდება (4) პირობა, დავიდა შემდეგ ამოცანაზე.

ამოცანა 4. დავუშვათ, მოცემულია ლოკალურად ინტეგრებადი და შემოსაზღვრული f ფუნქცია, რომელიც არ არის მუდმივი ფუნქციის ექვივალენტური. არსებობს, თუ არა ისეთი $x \in (a;b)$, რომ სრულდებოდეს

$$Mf(x) > \min\left\{M^{-}f(x), M^{+}f(x)\right\}?$$

ან რაც იგივეა თუ ყოველი x წერტილისთვის $M^{-}f(x) = M^{+}f(x)$, მაშინ $f = const$ თ.ყ.

ამ ამოცანაზე პასუხად გვაქვს ჰიპოთეზა, რომ ამგვარი x წერტილი ყოველთვის არსებობს. თუმცა რამდენად მარტივადაც არ უნდა ჩანდეს აღნიშნული ჰიპოთეზა, მისი დამტკიცება ტექნიკურად იმდენად რთული გამოდგა, რომ უწყვეტი ფუნქციებისთვისაც კი ვერ გავართვით თავი. ამ ეტაპზე აღნიშნული ჰიპოთეზა დამტკიცებულია მხოლოდ ალგებრული პოლინომებისთვის, მაგრამ მისი მეტისმეტად ტექნიკური ხასიათის გამო არ მივიჩნიეთ საჭიროდ მისი ჩართვა წინამდებარე საბაკალავრო ნაშრომში.

ჩვენი მოყვანილი თვისებები განზოგადებული ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიაციის ფუნქციებისა ძირითადად განსხვავდებოდა ჟორდანისა და ვინერის აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციების თვისებებისგან. შემდეგში მოვიყვანთ შედეგებს, რომელნიც სწორედ მსგავსებას ასახავენ.

ლემა 3. *განვიხილოთ $F(x) := V_a^x(p, f)$ როგორც x არგუმენტის ფუნქცია, მაშინ F არაკლებადი ფუნქციაა.*

დამტკიცება. ვინაიდან, $F(a) = 0$ განვიხილოთ $a < x < y \leq b$, მაშინ $[a;x]$-ის $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = x$ წერტილებით ყოველი დანაწილებისათვის, განვიხილოთ $[a;y]$-ის $a = t_0 < t_1 < ... < t_n < t_{n+1} = y$ წერტილებით დანაწილება. მაშინ, ცხადია, ნებისმიერი ფუნქციისთვის გვაქვს

$$\sum_{k=0}^{n} |f(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)} \leq \sum_{k=0}^{n+1} |f(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)}.$$

უტოლობის ორივე მხარეს თუ დავითვლით სუპრემუმს $[a;x]$-ის ყველა სასრულ დანაწილებათა $\Pi_{[a;x]}$ სიმრავლის მიმართ, მივიღებთ:

$$F(x) = \sup_{\Pi_{[a;x]}} \sum_{k=0}^{n} |f(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)} \leq \sup_{\Pi_{[a;x]}} \sum_{k=0}^{n+1} |f(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)} \leq \sup_{\Pi_{[a;y]}} \sum_{k=0}^{m} |f(Q_k)|^{\bar{p}(Q_k)} = F(y).$$

■

შენიშვნა 8. ზემოთ მოყვანილ ლემაში არ შევზღუდულვართ მხოლოდ $WBV_{p(\cdot)}$ კლასის ფუნქციებზე.

ჩვენი შემოღებული სივრცისთვის სამართლიანია ე.წ. ჰელის ამორჩევის თეორემა. დამტკიცებისთვის დაგვჭირდება ჰელის ამორჩევის შესახებ ორი დამხმარე დებულება [4, ლემა 1, გვ. 207] და [4, ლემა 2, გვ. 208].

ლემა 4 (ჰელის პირველი ლემა)**.** *დავუშვათ მოცემული გვაქვს $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული, ერთობლივ შემოსაზღვრული ფუნქციათა უსასრულო ოჯახი, მაშინ ნებისმიერი თვლადი $E \subset [a;b]$ სიმრავლისთვის ოჯახიდან გამოიყოფა მიმდევრობა, რომელიც კრებადი იქნება E სიმრავლის ყოველ წერტილში.*

ლემა 5 (ჰელის მეორე ლემა)**.** *დავუშვათ მოცემული გვაქვს $[a;b]$ სეგმენტზე განსაზღვრული, ერთობლივ შემოსაზღვრული არაკლებად ფუნქციათა უსასრულო ოჯახი, მაშინ ამ ოჯახიდან გამოიყოფა მიმდევრობა, რომელიც კრებადია რომელიღაც არაკლებადი ფუნქციისაკენ $[a;b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში.*

თეორემა 12. *დავუშვათ $p \in L^\infty[a;b]$ და მოცემული გვაქვს $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცის ფუნქციათა ერთობლივ შემოსაზღვრული უსარულო ოჯახი $\mathcal{F}$, ამასთან ამავე ფუნქციების ვარიაციათა სიმრავლეც შემოსაზღვრულია, მაშინ ამ ოჯახიდან გამოიყოფა ამავე სივრცის ფუნქციისაკენ წერტილოვნად კრებადი მიმდევრობა.*

დამტკიცება. ყოველი $f_\alpha \in \mathcal{F}$ ფუნქციისთვის განვსაზღვროთ არაკლებადი $F_\alpha(x) = V_a^x(p, f_\alpha)$ ფუნქცია (იხ. ლემა 3). ლემა 5-ის ძალით $\mathcal{F}$ ოჯახიდან, გამოიყოფა არაკლებადი F ფუნქციისკენ კრებადი $\{F_n\}$ მიმდევრობა. ამ მიმდევრობამ ცალსახად განსაზღვრა $\{f_n\}$ მიმდევრობა, ახლა კი ლემა 4-ის ძალით $\{f_n\}$ მიმდევრობიდან გამოიყოფა $E = \mathbb{Q} \cap [a;b] \cup \{a,b\}$ სიმრავლეზე კრებადი ქვემიმდევრობა $\{f_{n_k}\}$. დავუშვათ $f_{n_k} \to f$, $k \to +\infty$ E სიმრავლეზე, ამასთან, ცხადია, $F_{n_k} \to F$, $k \to +\infty$ $[a;b]$-ზე.

დავუშვათ x_0 არის ირაციონალური და F ფუნქციის უწყვეტობის წერტილი. ჩვენ დავამტკიცებთ, რომ $f_{n_k}(x_0)$ რიცხვითი მიმდევრობა კრებადია. ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის ავარჩიოთ რაციონალური რიცხვი $x_0 < t \in (a;b)$ ისეთი, რომ

$$0 \le F(t) - F(x_0) < \varepsilon^{\bar{p}(x_0;t)}/3.$$

ამასთან შევარჩიოთ $N_1 \in \mathbb{N}$ ისეთი, რომ ნებისმიერი $k > N$ რიცხვისთვის გვაქვს

$$|F_{n_k}(t) - F(t)| < \varepsilon^{\bar{p}(x_0;t)}/3 \quad \text{და} \quad |F_{n_k}(x_0) - F(x_0)| < \varepsilon^{\bar{p}(x_0;t)}/3,$$

მაშინ თეორემა 10-ის ძალით და როცა $k > N_1$ გვაქვს

$$|f_{n_k}(t) - f_{n_k}(x_0)|^{\bar{p}(x_0;t)} \le V_{x_0}^t(p, f_{n_k}) \le V_a^t(p, f_{n_k}) - V_a^{x_0}(p, f_{n_k}) = F_{n_k}(t) - F_{n_k}(x_0) \le$$
$$\le |F_{n_k}(t) - F(t)| + |F(t) - F(x_0)| + |F(x_0) - F_{n_k}(x_0)| < \varepsilon^{\bar{p}(x_0;t)}.$$

მივიღეთ, რომ

$$|f_{n_k}(t) - f_{n_k}(x_0)| < \varepsilon,$$

ახლა ავარჩიოთ N_2 რიცხვი ისე, რომ როცა $m, n > N_2$ გვაქვს

$$|f_{n_m}(t) - f_{n_s}(t)| < \varepsilon.$$

ახლა თუ $N = \max\{N_1, N_2\}$, მაშინ როცა $m, s > N$

$$|f_{n_m}(x_0) - f_{n_s}(x_0)| = |f_{n_m}(x_0) - f_{n_m}(t) + f_{n_m}(t) - f_{n_s}(t) + f_{n_s}(t) - f_{n_s}(x_0)| \le$$
$$\le |f_{n_m}(x_0) - f_{n_m}(t)| + |f_{n_m}(t) - f_{n_s}(t)| + |f_{n_s}(t) - f_{n_s}(x_0)| < 3\varepsilon.$$

ამგვარად, $f_{n_k}(x_0)$ კრებადია F ფუნქციის უწყვეტობის წერტილში. ვინაიდან, არაკლებადი F ფუნქციის წყვეტის წერტილთა სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია და f_{n_k} ფუნქციათა მიმდევრობა ერთობლივ შემოსაზღვრულია, მაშინ კვლავ ლემა 4-ის ძალით ამ მიმდევრობიდან ამოვარჩევთ

ისეთ $f_{n_{k_s}}$ ქვემიმდევრობას, რომ აღნიშნულ თვლად სიმრავლეზეც იქნება კრებადი, ამგვარად, $\{f_{n_{k_s}}\}$ ქვემიმდევრობა კრებადი იქნება $[a;b]$ სეგმენტის ყოველ წერტილში f ფუნქციისაკენ. ამასთან, ცხადია, რომ $V_a^b(p,f)$ სასრული რიცხვია. მართლაც, ვინაიდან, ყოველი s რიცხვისთვის $V_a^b(p,f) \leq M$, ეს ნიშნავს, რომ ნებისმიერი სასრული დანაწილებისთვის

$$\sum_{i=1}^{m} |f_{n_{k_s}}(Q_i)|^{\bar{p}(Q_i)} \leq M.$$

ამ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე როცა $s \to +\infty$, მაშინ მივიღებთ

$$\sum_{i=1}^{m} |f(Q_i)|^{\bar{p}(Q_i)} \leq M,$$

$[a;b]$ სეგმენტის ყოველი დანაწილებისთვის, მაშასადამე $V_a^b(p,f) \leq M$, ანუ $f \in WBV_{p(\cdot)}$. ■

ჰელის თეორემა დამტკიცებულია არსებითად შემოსაზღვრული მაჩვენებელი ფუნქციებისთვის.

ამოცანა 5. საზოგადოდ, არის თუ არა ჰელის განზოგადებული თეორემა 12-ის ანალოგი სამართლიანი არსებითად შემოუსაზღვრელი ფუნქციებისთვის?

დასკვნა

ნაშრომში კვლევითია შემოღებულია ცვლადმაჩვენებლიანი სასრული ვარიციის ფუნქციათა $WBV_{p(\cdot)}$ სივრცე. მიღებულია ახალი შედეგები, ნაჩვენებია ზოგიერთი შედეგის გარკვეული აზრით გაუმჯობესებადობა.

დამტკიცებული 12 თეორემა, 3 ლემა, განხილულია 8 შენიშვნა, ზოგი მათგანი დამტკიცებებითა და კონტრმაგალითებით. დასმულია 5 ღია ამოცანა, რომელზეც პასუხის გაცემის მნიშვნელობა ხაზგასმული და არგუმენტირებულია შესაბამის შენიშვნებში. მიღებული შედეგების უმრავლესობას არა აქვს ანალოგები წინმსწრებ [2] ნაშრომში, ხოლო ის შედეგები, რომელთა ანალოგებიც არის აღნიშნულ ნაშრომში, წარმოადგენენ არსებით გაუმჯობესებას წინამორბედ შედეგებთან შედარებით, აღნიშნულიც გადმოცემულია შესაბამის განხილულ კონტრმაგალითებში.

ლიტერატურა

[1] C. Bennett and R. Sharpley. Interpolation of operators., volume 129 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[2] R. Castillo, N. Merentes, H. Rafeiro, Bounded Variation Spaces with p-Variable. Mediterranean Journal of Mathematics, 11, (2014), 1069-1079.

[3] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, Variable Lebesgue Spaces, Birkhäuser Basel, 2013.

[4] И.П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, изд-во "Наука 1974.